

Methoden der unendlichen Kombinatorik angewendet auf $\aleph_1$ -dimensionale ε -hermitesche Räume

Inaugural-Dissertation

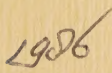
zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von

FRED APPENZELLER

aus Zürich ZH und St.Gallen SG

Begutachtet von
Prof. Dr. H. Gross


Zürich ~~1985~~

Zentralstelle der Studentenschaft

Methoden der unendlichen Kombinatorik angewendet auf $\aleph_1$ -dimensionale ε -hermitesche Räume

Inaugural-Dissertation

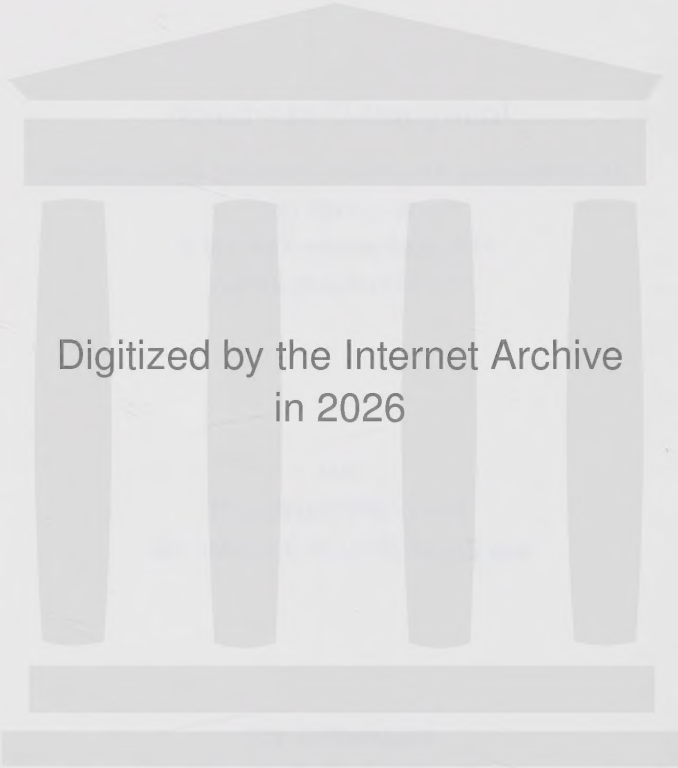
zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von

FRED APPENZELLER
aus Zürich ZH und St.Gallen SG

Begutachtet von
Prof. Dr. H. Gross

Zürich 1985
Zentralstelle der Studentenschaft



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhalt

Einleitung	1
I. Die Γ -Invariante	3
II. Die Reichhaltigkeit an $\aleph_1$ -dimensionalen $\mathfrak{L}$ -hermiteschen Räumen	10
III. Das Kriterium der Ausschöpfungsäquivalenz	16
Anhang A. Die Boolesche Algebra $\mathfrak{B}(\omega_1)$	30
Anhang B. $\mathfrak{MA}_{\aleph_1}$	32
Anhang C. $\Diamond(E)$ und $\S(E)$	40
Referenzen	45

Einleitung

Die vorliegende Arbeit handelt von $\mathfrak{L}$ -hermiteschen Räumen der Dimension $\aleph_\lambda$ über einem $\aleph$ -Körper k beliebiger Charakteristik; die Räume dürfen zusätzlich noch eine Unter-
raumverbandsstruktur tragen. Grundlegendes Hilfsmittel zu deren Verständnis sind Ausschöpfungen, d.h. Darstellungen als Vereinigung einer aufsteigenden Kette aus abzählbardimensionalen Unterräumen. Mittels der Theorie der stationären Teilmengen von ω_λ (siehe Appendix A) lassen sich die verschiedenen solchen Darstellungen vergleichen, und man kann nach P.C. EKLOF eine Invariante Γ definieren; dies ist im Kapitel I ausgeführt.

Im Kapitel II wird gezeigt, dass es bei festem $(k, \aleph, \mathfrak{L})$ zu jedem Wert $\neq 0$ von Γ die Vielzahl von $2^{\aleph_\lambda}$ Isometrietypen von $\mathfrak{L}$ -hermiteschen Räumen mit der vorgegebenen Invariante gibt; siehe Satz 2.

Das Kapitel III verwendet Axiome, die von der üblichen Mengenlehre nach ZERMELO-FRAENKEL (incl. Auswahlaxiom) unabhängig sind: Aus $\mathfrak{MA}_{\aleph_\lambda}$ (siehe Anhang B, wo auch eine Ausarbeitung von [Mek] steht) wird ein Kriterium (Satz 3) für die Isomorphie von Räumen hergeleitet, das aber nach Satz 4 unter $\mathfrak{V} = \mathfrak{L}$ (oder schon einer Folgerung davon, $\mathfrak{G}(\mathfrak{L})$; siehe Anhang C) nicht hinreichend ist.

Die erwähnten Methoden sind von P.C. EKLOF, M. HUBER und A. MEKLER schon erfolgreich auf ω -filtrierte Vektorräume und gewisse abelsche Gruppen angewendet worden; siehe [Ek1], [Ek2], [E/M], [E/H] und [Hub]. Dabei sind zu den Sätzen 2, 3 und 4

analoge Resultate bekannt. Da die ω -filtrierte Vektorräume die einfachsten Studienobjekte sind (und Analoga der Sätze 3 und 4 zuerst hierfür bewiesen worden sind), werden wir die Besonderheiten der Situation bei $\mathcal{E}$ -hermiteschen Räumen im Vergleich mit der ausführlichen Abhandlung [E/H] herausstreichen.

H. GROSS möchte ich für die Unterstützung meiner Forschung, manche Anregung und das Aufdecken eines peinlichen Fehlers herzlich danken, M. HUBER für seine Hilfe beim Einstieg in die Materie, and I wish to express my gratefulness to P.C. EKLOF for jotting down the passage of the yet unpublished [Ek3] containing a counterpart to Satz 4 for ω -filtered vector spaces.

Zürich, im Oktober 1985

F. Appenzeller

I. Die Γ -Invariante

In der ganzen Arbeit sei k ein fest gewählter Schiefkörper beliebiger Charakteristik mit involutorischem Antiautomorphismus $*$, und $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$. Wir behandeln k -lineare Räume X versehen mit einer ε -hermiteschen (d.h. je nach ε hermiteschen oder schiefhermiteschen) Form $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_X$.¹⁾ Weiter soll X die nachstehend definierte Struktur eines $\mathcal{V}$ -Raumes für eine Partialordnung $(\mathcal{V}, \leq)$ tragen.

Definitionen Ein k -linearer Raum X heisst $\mathcal{V}$ -Raum, falls zu jedem $\alpha \in \mathcal{V}$ ein linearer Unterraum X^α von X so definiert ist, dass für $\alpha \leq \beta$ gilt: $X^\alpha \subseteq X^\beta$. Ist $\mathcal{V}$ vom zu den endlichen Ordinalzahlen entgegengesetzten Ordnungstyp, so heisst X ein ω -filtrierter Vektorraum.

Ein linearer Unterraum Y eines $\mathcal{V}$ -Raumes X wird stets als $\mathcal{V}$ -Unterraum von X betrachtet durch die $\mathcal{V}$ -Raumstruktur $Y^\alpha := X^\alpha \cap Y$.

Die $\mathcal{V}$ -Raum-Summe $X \oplus Y$ ²⁾ zweier $\mathcal{V}$ -Räume X und Y ist der lineare Raum $X \oplus Y$ versehen mit $(X \oplus Y)^\alpha := X^\alpha \oplus Y^\alpha$.

Ein linearer Isomorphismus $f: X \rightarrow Y$ zweier $\mathcal{V}$ -Räume X und Y heisst $\mathcal{V}$ -Raum-Isomorphismus, falls $f(X^\alpha) = Y^\alpha$.

Konventionen ε -hermitesche $\mathcal{V}$ -Räume werden wir kurz Räume nennen, und Isometrien zwischen solchen, die zugleich $\mathcal{V}$ -Raum-Isomorphismen sind, sollen Isomorphismen heissen.

¹⁾ Genaue Definitionen (ohne hier getroffene Normierungen) stehen bei [Gro].

²⁾ Bei ω -filtrierten Vektorräumen schreiben [E/H] stets $\oplus$ für $\bigoplus_{\mathcal{V}}$.

Lineare Unterräume erben stets die $\mathcal{E}$ -hermitesche und die $\mathcal{V}$ -Raumstruktur des umgebenden Raumes, und die Summe $X \oplus Y$ zweier Räume X und Y trägt die Struktur der orthogonalen Summe $X \oplus Y$ sowie die der Summe $X \oplus Y$ von $\mathcal{V}$ -Räumen.

Ein Unterraum Y eines Raumes X heisst Summand (in X), falls $X = Y \oplus Y^\perp$.

Ist die $\mathcal{V}$ -Raumstruktur eines Raumes X trivial, d.h. $\forall \alpha \in \mathcal{V} (X^\alpha = X)$, so sprechen wir vom rein $\mathcal{E}$ -hermiteschen Fall; sind X, Y rein $\mathcal{E}$ -hermitesch, so sind die Summanden in X die orthogonalen Summanden, die Isomorphismen $X \rightarrow Y$ die Isometrien.

Lemma 1 (1) Für Räume $Y \subseteq Z \subseteq X$ gilt: Y ist Summand in $X \Rightarrow Y$ ist Summand in Z .

(2) Für Räume $Y \subseteq X$ ist Y genau dann Summand in X , wenn $\forall Z$ Raum mit $Y \subseteq Z \subseteq X$ und $\dim(Z/Y) < \aleph_0$ (Y ist Summand in Z).

(1) folgt direkt mit dem Modularitätsgesetz.

" $\Rightarrow$ " von (2) folgt aus (1); zu " $\Leftarrow$ " schreiben wir $X = \sum_{i \in I} Z(i)$, wobei die $Z(i)$ Räume mit $Y \subseteq Z(i) \subseteq X$ und $\dim(Z(i)/Y) < \aleph_0$ seien. Nach Voraussetzung gilt für jedes endliche $J \subseteq I$: $\sum_{i \in J} Z(i) = Y \oplus (Y^\perp \cap \sum_{i \in J} Z(i))$, und daraus folgt: $\sum_{i \in I} Z(i) = Y \oplus (Y^\perp \cap \sum_{i \in I} Z(i))$, d.h. $X = Y \oplus Y^\perp$. $\square$

Vergleich mit [E/H]: Ersetzt man $\aleph_0$ durch $\aleph_1$ im Kriterium von (2), so erhält man eine Eigenschaft, die in der Terminologie von [E/H] lautet: Y ist $\aleph_1$ -Summand in X . Das Analogon dieser Verschärfung beispielsweise bei den abelschen Gruppen ist aber nicht hinreichend dafür, dass Y Summand in X

ist. Dass dies bei den hier betrachteten Räumen so ist, liegt darin, dass ein Supplement von Y in X , falls überhaupt eines existiert, gleich $Y^\perp$ sein muss.

Definition Eine (glatte) Ausschöpfung ¹⁾ eines $\aleph_1$ -dimensionalen k -linearen X ist eine Familie $(X_\nu)_{\nu < \omega_1}$ aus $\aleph_0$ -dimensionalen Unterräumen so, dass $\forall \tau \leq \nu < \omega_1$ ($X_\tau \subseteq X_\nu$), $X_0 = \{0\}$, $\forall \nu < \omega_1$ mit ν ist Limeszahl ($X_\nu = \bigcup_{\tau < \nu} X_\tau$), und $X = \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$. In solcher Situation schreiben wir kurz $X \stackrel{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$.

Lemma 2 (1) Ist $h: \omega_\lambda \rightarrow \omega_\lambda$ normal ²⁾ und $X \stackrel{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_\lambda} X_\nu$, so auch $X \stackrel{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_\lambda} X_{h(\nu)}$.

(2) Ist $X \stackrel{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_\lambda} X_\nu$ und $X \stackrel{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_\lambda} \tilde{X}_\nu$, so ist $\{\nu < \omega_\lambda \mid X_\nu = \tilde{X}_\nu\}$ ein cul.

$\Gamma(1)$ ist aus den Definitionen klar.

Bei (2) ist nur zu zeigen, dass $C := \{\nu < \omega_\lambda \mid X_\nu = \tilde{X}_\nu\}$ unbeschränkt in ω_λ ist: Zu gegebenem $\tau < \omega_\lambda$ bilden wir in ω_λ : $\tau \leq \nu(0) \leq \tilde{\nu}(0) \leq \nu(1) \leq \tilde{\nu}(1) \leq \dots$ mit $X_\tau \subseteq X_{\nu(0)} \subseteq \tilde{X}_{\tilde{\nu}(0)} \subseteq X_{\nu(1)} \subseteq \tilde{X}_{\tilde{\nu}(1)} \subseteq \dots$. $\nu := \sup \{\nu(u) \mid u < \omega_0\} = \sup \{\tilde{\nu}(u) \mid u < \omega_0\}$ erfüllt dann $\nu \geq \tau$, und $X_\nu = \bigcup_{u < \omega_0} X_{\nu(u)} = \bigcup_{u < \omega_0} \tilde{X}_{\tilde{\nu}(u)} = \tilde{X}_\nu$, d.h. $\nu \in C$.

Definition Für einen $\aleph_1$ -dimensionalen Raum X ist die Γ -Invariante $\Gamma(X)$ wie folgt definiert: Ist

¹⁾ oder in der Terminologie von P.C. EKLOF: ω_1 -Filtrierung

²⁾ Dieser und weitere mengentheoretische Begriffe sind im Anhang A und den dortigen Referenzen erläutert.

$\bigcup_{v < \omega_1} X_v \neq X \neq \bigcup_{v < \omega_1} \tilde{X}_v$, so gilt für $C := \{v < \omega_1 \mid X_v = \tilde{X}_v\}$:
 $\{v < \omega_1 \mid X_v \text{ ist kein Summand}\} \cap C = \{v < \omega_1 \mid \tilde{X}_v \text{ ist kein Summand}\} \cap C$; nach Lemma 2 (2) ist deshalb $\Gamma(X) := \{v < \omega_1 \mid X_v \text{ ist kein Summand}\} \sim^1$) eine Invariante von X .

Satz 1 Für jeden $\aleph_1$ -dimensionalen Raum X gelten:

- (1) $\Gamma(X) = 0 \iff$ Es gibt $\aleph_0$ -dimensionale Unterräume $X(v)$ mit $X = \bigoplus_{v \in \aleph_1} X(v)$.
 (2) $\Gamma(X) \neq 1 \iff$ Zu jedem $X \neq \bigcup_{v < \omega_1} X_v$ gibt es eine normale Funktion $h: \omega_1 \rightarrow \omega_1$ mit $\forall v < \omega_1 (X_{h(v+1)})$ ist ein Summand).

(1) " $\implies$ ": Man wähle $X \neq \bigcup_{v < \omega_1} X_v$. $\{v < \omega_1 \mid X_v \text{ ist kein Summand}\}$ ist nach Voraussetzung dünn, also zu einem cub C disjunkt. C ist das Bild einer normalen Funktion $h: \omega_1 \rightarrow \omega_1$, und nach Lemma 2 (1) ist $X \neq \bigcup_{v < \omega_1} X_{h(v)}$. Wegen $\{v < \omega_1 \mid X_{h(v)} \text{ ist kein Summand}\} = \emptyset$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\forall v < \omega_1 (X_v \text{ ist ein Summand})$.

Nun gibt es zu jedem $v < \omega_1$ einen $\aleph_0$ -dimensionalen Unterraum $X(v)$ mit $X_{v+1} = X_v \oplus X(v)$. Durch Induktion erhalten wir $X = \bigoplus_{v < \omega_1} X(v)$.

(1) " $\impliedby$ ": Ist $X = \bigoplus_{v < \omega_1} X(v)$, so definieren wir $X_v := \bigoplus_{t < v} X(t)$. Dann ist $X \neq \bigcup_{v < \omega_1} X_v$, und damit berechnet man $\Gamma(X) = 0$.

(2) " $\implies$ ": Ist $X \neq \bigcup_{v < \omega_1} X_v$ vorgegeben, so definieren wir ein normales $h: \omega_1 \rightarrow \omega_1$ rekursiv durch die Vor-

¹ $\sim$ ist im Anhang A definiert.

gabe von $h(v+1)$ für jedes $v < \omega_1$: Wegen $\Gamma(X) \neq 1$ enthält $\{v < \omega_1 \mid X_v \text{ ist kein Summand}\}$ kein cub, speziell also nicht $\{\mu < \omega_1 \mid \mu > h(v)\}$, d.h. es gibt ein $h(v+1) > h(v)$ so, dass $X_{h(v+1)}$ ein Summand ist.

(2), Kontraposition von " $\Leftarrow$ ": Ist $\Gamma(X) = 1$, so nehmen wir $X \stackrel{f}{=} \bigcup_{v < \omega_1} X_v$. $\{v < \omega_1 \mid X_v \text{ ist kein Summand}\}$ ist ein cub, also Bild einer normalen Funktion $\omega_1 \rightarrow \omega_1$. Wegen Lemma 2 (1) können wir deshalb o.B.d.A. voraussetzen: $\forall v < \omega_1 (X_v \text{ ist kein Summand})$. Zu dieser Ausschöpfung gibt es kein h mit der betreffenden Eigenschaft.]

Korollar Für jeden rein ε -hermiteschen $\aleph_1$ -dimensionalen Raum X gilt: $\Gamma(X) = 0 \iff X \text{ ist diagonal}^1$).

[Dies folgt aus Satz 1 (1), wenn man beachtet, dass $\aleph_0$ -dimensionale ε -hermitesche Räume diagonalisierbar sind.]

Satz (H. Gross) Ist $\text{char } k \neq 2$, so besitzt jeder prädiagonale²⁾ symmetrisch bilineare Raum der Dimension $\aleph_1$, der nicht diagonal ist, die Γ -Invariante 1.

[Erfüllt X alle Voraussetzungen, und ist $X \stackrel{f}{=} \bigcup_{v < \omega_1} X_v$, so bilden wir mit dem Quadratischen Abschluss $\bar{k}$ von k die $\bar{k}$ -ifizierung von X und den X_v : $\bar{X} := \bar{k} \otimes X$, $\bar{X}_v := \bar{k} \otimes X_v$, aufgefasst als $\bar{k}$ -lineare Räume mit hochgehobener Form. Nun gilt für alle $v < \omega_1$: X_v ist Summand in $X \implies \bar{X}_v$ ist Summand in $\bar{X}$; also ist $\Gamma(X) \geq \Gamma(\bar{X})$, und insbesondere gilt $\Gamma(\bar{X}) = 1 \implies \Gamma(X) = 1$.

¹ d.h. X ist orthogonale Summe endlichdimensionaler Unterräume

² d.h. er ist Teilraum eines diagonalen

Damit können wir o.B.d.A. voraussetzen, k sei quadratisch abgeschlossen. Nach der Variante von [G/K] Theorem 9 für quadratisch abgeschlossene Körper einer Charakteristik $\neq 2$ ist X nun orthogonale Summe von Kopien des Raumes U_1 auf p. 83 in [G/K] und evt. einem totalisotropen Raum.

Wegen des nachstehenden Lemmas 3 (2) können wir o.B.d.A. annehmen, X sei selbst von Typ U_1 , d.h. es gibt einen nichtausgearteten diagonalen Raum $\tilde{X}$ mit Orthogonalbasis $\{x_\tau \mid \tau < \omega_1\}$ so, dass $X = \sum_{\tau < \mu < \omega_1} k(x_\mu - x_\tau) \subseteq \tilde{X}$. Dann ist keines der $X_\nu := \sum_{\tau < \mu < \nu} k(x_\mu - x_\tau)$ mit $\nu \geq \kappa$ Summand in X , und wegen $X \neq \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$ folgt $\Gamma(X) = 1$.]

Lemma 3 Sei $\kappa \leq \omega_1$, und für jedes $\tau < \kappa$ sei $X^{(\tau)}$ ein κ_1 -dimensionaler Raum, $Y^{(\tau)} \subseteq X^{(\tau)}$ ein Unterraum.

(1) $(\bigoplus_{\tau < \kappa} Y^{(\tau)})^\perp = \bigoplus_{\tau < \kappa} (Y^{(\tau)})^\perp$, wobei $\perp$ links in $\bigoplus_{\tau < \kappa} X^{(\tau)}$, rechts in $X^{(\kappa)}$ zu verstehen ist.

(2) $\Gamma(\bigoplus_{\tau < \kappa} X^{(\tau)}) = \sup \{ \Gamma(X^{(\tau)}) \mid \tau < \kappa \}$.

$\Gamma(1)$ ist sofort klar.

(2) : Wählt man $X^{(\kappa)} \neq \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu^{(\tau)}$, so ist für $\tilde{X} := \bigoplus_{\tau < \kappa} X^{(\tau)}$ und $\tilde{X}_\nu := \bigoplus_{\tau < \kappa \wedge \tau < \nu} X_\nu^{(\tau)} \oplus \bigoplus_{\tau < \kappa \wedge \tau \geq \nu} \{0\}$: $\tilde{X} \neq \bigcup_{\nu < \omega_1} \tilde{X}_\nu$. Nach (1) gilt für alle $\nu < \omega_1$: $\tilde{X}_\nu$ ist Summand in $\tilde{X} \iff \forall \tau < \kappa (\tau < \nu \implies X_\nu^{(\tau)} \text{ ist Summand in } X^{(\tau)})$, oder umformuliert : $\{\nu < \omega_1 \mid \tilde{X}_\nu \text{ ist kein Summand in } \tilde{X}\} = \bigtriangledown_{\tau < \kappa}^1 \{\nu < \omega_1 \mid X_\nu^{(\tau)} \text{ ist kein Summand in } X^{(\tau)}\}$, und daraus folgt mit Lemma 3 des Anhangs A die Behauptung.]

¹ $\bigtriangledown$ bezeichnet die Diagonale Vereinigung; siehe Anhang A.

Vergleich mit [E/H] : Ein $\aleph_1$ -dimensionaler ω -filtrierter Vektorraum heisst schwach $\aleph_1$ -separabel, falls jeder $\aleph_0$ -dimensionale Teilraum in einem solchen enthalten ist, der $\aleph_1$ -Summand (siehe Vergleich nach Lemma 1) ist. Aus Satz 1 (2) folgt, dass $\aleph_1$ -dimensionale Räume X mit $\Gamma(X) \neq 1$ diese Bedingung erfüllen. Wir führen den Begriff hier jedoch nicht ein, da er bei ω -filtrierten Vektorräumen nur dadurch fruchtbar ¹⁾ wird, dass für einen Unterraum Y eines separierten ²⁾ ω -filtrierten Vektorraumes X gilt : Y ist $\aleph_1$ -Summand in X $\iff Y$ ist abgeschlossen in X . Auf den hiesigen Räumen X gibt es jedoch keine Topologie mit dieser Eigenschaft, da der Durchschnitt zweier Summanden keiner zu sein braucht.

¹⁾ z.B. im Gegenstück des hiesigen Satzes 3 ([E/H] Teil II, Theorem 2.1)

²⁾ Die ω -Filtrierung definiert eine Topologie.

II. Die Reichhaltigkeit an

$\aleph_1$ -dimensionalen $\mathcal{E}$ -hermiteschen Räumen

$k, *, \mathcal{E}$ seien dieselben Objekte wie im vorangehenden Kapitel.

Definition Wir sagen, γ sei ein Leiternsystem auf E , falls E eine Teilmenge der Limeszahlen in ω_1 ist, und $\gamma = (\gamma_\mu)_{\mu \in E}$ so, dass jedes γ_μ eine Leiter auf E ist, d.h. eine monoton wachsende Funktion $\omega_0 \rightarrow \omega_1$ mit $\sup \{\gamma_\mu(n) \mid n < \omega_0\} = \mu$; wir setzen hier noch voraus, dass jedes $\gamma_\mu(n)$ Nachfolgerzahl ist.

Zum konstruktiven Nachweis des folgenden Satzes 2 und als Beispiele zum Kapitel III definieren wir zu jedem Leiternsystem γ auf E einen $\aleph_1$ -dimensionalen rein $\mathcal{E}$ -hermiteschen Raum $X(\gamma)$. Dazu verwenden wir eine injektiv aufgezählte Menge $\{x_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0\} \cup \{\hat{x}_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0\} \cup \{\gamma_\mu \mid \mu \in E\}$ aus k -linear unabhängigen Vektoren, aus denen wir zunächst lineare Räume bilden:

$$B := \bigoplus_{\tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0} (k x_{\tau+1}^{(n)} \oplus k \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}), \\ X(\gamma) := B \oplus \bigoplus_{\mu \in E} k \gamma_\mu^{(1)},$$

und für jedes $\nu < \omega_1$:

$$B_\nu := \bigoplus_{\tau+1 < \nu \wedge n < \omega_0} (k x_{\tau+1}^{(n)} \oplus k \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}), \\ B_\nu' := \bigoplus_{\nu \leq \tau+1 < \omega_1 \wedge n < \omega_0} (k x_{\tau+1}^{(n)} \oplus k \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}),$$

¹ Wo im Folgenden von Komponenten der Vektoren aus $X(\gamma)$ die Rede ist, bezieht sich dies stets auf die Basis $\{x_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0\} \cup \{\hat{x}_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0\} \cup \{\gamma_\mu \mid \mu \in E\}$.

$$X_v(y) := B_v \oplus \bigoplus_{\mu \in E, \mu < v} k y_\mu.$$

Soweit gilt $X(y) = \bigcup_{v < \omega_1} X_v(y)$. Wir versehen nun

$X(y)$ mit der ξ -hermiteschen Form definiert durch :

$$\left. \begin{aligned} \langle x_{\tau+1}^{(n)}, \hat{x}_{\mu+1}^{(m)} \rangle^{(y)} &:= \delta_{\tau,\mu} \delta_{n,m}, \\ \langle x_{\tau+1}^{(n)}, x_{\mu+1}^{(m)} \rangle^{(y)} &:= \langle \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}, \hat{x}_{\mu+1}^{(m)} \rangle^{(y)} := 0, \\ \langle x_{\tau+1}^{(n)}, y_\mu \rangle^{(y)} &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau+1 = y_\mu(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \\ \langle \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}, y_\mu \rangle^{(y)} &:= 0, \\ \langle y_\tau, y_\mu \rangle^{(y)} &:= 0. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(\tau, \mu < \omega_1; n, m < \omega_0) \\ &(\tau < \omega_1; n < \omega_0; \mu \in E) \\ &(\tau, \mu \in E) \end{aligned}$$

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein : Für $v < \mu$
 $\in E$ sei $m_{v/\mu}^{(y)} := \max \{ m < \omega_0 \mid y_\mu(m) < v \}$, wo $\max \emptyset$
 $:= -\infty$, und $u_{v/\mu}^{(y)} := \sum_{0 \leq m \leq m_{v/\mu}^{(y)}} \hat{x}_{y_\mu(m)}^{(m)}$; bei $m_{v/\mu}^{(y)} = -\infty$ sei
 die Summe $= 0$.

Lemma 4 Bezüglich jedes Leiternsystems y auf E und
 für jedes $v < \omega_1$ gelten :

$$(1) \quad X_v(y)^{\perp(y)} = B_v' \oplus \bigoplus_{\mu \in E, v < \mu} k(y_\mu - u_{v/\mu}^{(y)}).$$

(2) $v \in E \Rightarrow X(y) = X_v(y) \oplus k y_v \oplus X_v(y)^{\perp(y)}$; also $v \in E$
 $\Rightarrow X_v$ ist kein Summand in $X(y)$.

(3) $v \notin E \Rightarrow X_v(y)$ ist Summand in $X(y)$; speziell
 ist also jedes $X_{v+1}(y)$ Summand in $X(y)$.

$$(4) \quad \Gamma(X(y)) = E^\sim.$$

"Wir lassen " y " weg bei " $X(y)$ ", " $X_v(y)$ ", " $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(y)}$ ",
 " $\perp^{(y)}$ ", " $m_{v/\mu}^{(y)}$ " und " $u_{v/\mu}^{(y)}$ ".

In (1) folgt " $\supseteq$ " aus den vier Relationen :

$$- \quad B_v \perp B_v'.$$

¹ Beachte, dass unter dem Summationszeichen $v < \mu$ steht, nicht $v \leq \mu$.

$$\begin{aligned}
 & - B_v \perp \bigoplus_{\mu \in E \wedge v < \mu} k(y_\mu - u_{v,\mu}). \quad \text{Für } n < \omega_0, \\
 & \tau+1 < v \text{ und } \mu \in E \text{ mit } v < \mu \text{ ist } \langle x_{\tau+1}^{(n)}, y_\mu - u_{v,\mu} \rangle \\
 & = \underbrace{\langle x_{\tau+1}^{(n)}, y_\mu \rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ falls } \tau+1 = y_\mu(n) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}} - \sum_{0 \leq m \leq m_{v,\mu}} \underbrace{\langle x_{\tau+1}^{(n)}, \hat{x}_{y_\mu(m)}^{(m)} \rangle}_{= \begin{cases} 1 \text{ falls } n = m \wedge \tau+1 = y_\mu(m) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}} \\
 & \stackrel{1)}{=} 0, \text{ und } \langle \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}, y_\mu - u_{v,\mu} \rangle = \underbrace{\langle \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}, y_\mu \rangle}_{= 0} - \sum_{0 \leq m \leq m_{v,\mu}} \underbrace{\langle \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}, \hat{x}_{y_\mu(m)}^{(m)} \rangle}_{= 0} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \bigoplus_{\tau \in E \wedge \tau < v} k y_\tau \perp B_v'. \quad \text{Für } \tau \in E \text{ mit } \tau < v \text{ und} \\
 & \mu+1 \geq v, n < \omega_0 \text{ ist } \langle y_\tau, x_{\mu+1}^{(n)} \rangle = 0 \text{ wegen } y_\tau(n) < \tau \\
 & < v \leq \mu+1, \text{ und auch } \langle y_\tau, \hat{x}_{\mu+1}^{(n)} \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \bigoplus_{\tau \in E \wedge \tau < v} k y_\tau \perp \bigoplus_{\mu \in E \wedge v < \mu} k(y_\mu - u_{v,\mu}). \quad \text{Für } \tau \in E \text{ mit} \\
 & \tau < v \text{ und } \mu \in E \text{ mit } v < \mu \text{ gilt } \langle y_\tau, y_\mu - u_{v,\mu} \rangle \\
 & = \underbrace{\langle y_\tau, y_\mu \rangle}_{= 0} - \sum_{0 \leq m \leq m_{v,\mu}} \underbrace{\langle y_\tau, \hat{x}_{y_\mu(m)}^{(m)} \rangle}_{= 0} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\text{"} \leq \text{" in (1): Setze } \tilde{X}_v := B_v' \oplus \bigoplus_{v < \mu \in E} k(y_\mu - u_{v,\mu}).$$

Ein Element von $X_v^\perp$ schreiben wir $x + \lambda y_v + \tilde{x}$, wo $x \in X_v$,

$\tilde{x} \in \tilde{X}_v$. $m < \omega_0$ wähle man so, dass jede Komponente y von

x erfüllt: $x_{y_v(m)}^{(m)} \perp y$, also insgesamt $x_{y_v(m)}^{(m)} \perp x$. Nun gilt

$$\underbrace{\langle x_{y_v(m)}^{(m)}, x + \lambda y_v + \tilde{x} \rangle}_{= 0} = \underbrace{\langle x_{y_v(m)}^{(m)}, x \rangle}_{= 0} + \underbrace{\langle x_{y_v(m)}^{(m)}, y_v \rangle}_{= 1} \lambda + \underbrace{\langle x_{y_v(m)}^{(m)}, \tilde{x} \rangle}_{\stackrel{2)}{=} 0},$$

also $x + \lambda y_v + \tilde{x} = x + \tilde{x}$; deshalb gilt für jedes $y \in X_v$:

$$\underbrace{\langle y, x + \lambda y_v + \tilde{x} \rangle}_{= 0} = \langle y, x \rangle + \underbrace{\langle y, \tilde{x} \rangle}_{\stackrel{2)}{=} 0}, \text{ weshalb } x = 0 \text{ sein muss}$$

und damit $x + \lambda y_v + \tilde{x} = \tilde{x} \in \tilde{X}_v$.

(2) und (3) lassen sich aus (1) ablesen, und berechnet man $\Gamma(X(y))$ an Hand von $X \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{v \in \omega_1} X_v$, so folgt (4) aus (2)

¹ Der Schluss benötigt noch: $\tau+1 = y_\mu(m) \Rightarrow y_\mu(m) < v \Rightarrow m \leq m_{v,\mu}$.

² nach dem Teil "2"

und (3).

Im Beispiel zu Satz 3 und seinem Korollar (p.21) und im Beweis des Satzes 4 (p. 25) werden wir brauchen, dass die $X(\gamma)$ eine Eigenschaft $(*)$ (p. 16) haben; diese folgt aus :

Lemma 5 Ist γ ein Leiternsystem auf E und $W \subseteq X(\gamma)$ endlichdimensional, so gilt für fast alle ¹⁾ $v < \omega_1$: $W \subseteq X_v(\gamma) + X_v(\gamma)^{\perp^{(4)}}$.

Da W endlichdimensional ist, ist für fast alle $v \in E$ die γ_v -Komponente jedes Vektors aus W gleich 0. Dann gilt aber $W \subseteq X_v(\gamma) + X_v(\gamma)^{\perp^{(4)}}$ nach Lemma 4 (2), (3). $\square$

Satz 2 Zu jedem $e \in \mathfrak{D}(\omega_1) \setminus \{0\}$ (siehe Anhang A) gibt es mindestens $2^{\aleph_1}$ Isometrietypen von $\mathcal{E}$ -hermiteschen Räumen der Dimension $\aleph_1$ über $(k, *)$ mit e als Γ -Invariante.

Wir wählen E und γ so, dass $E^\sim = e$ und dass γ ein Leiternsystem auf E ist. Lemma 2 des Anhangs A liefert eine Familie $(E(\alpha))_{\alpha \in \omega_1}$ mit $\forall \alpha \in \omega_1 (E(\alpha) \subseteq E)$ und $\forall \alpha \neq \beta (E(\alpha) \not\subseteq E(\beta))$, und wir wählen ein Leiternsystem $\gamma(\alpha)$ auf jedem $E(\alpha)$. Damit definieren wir $X^{(\alpha)} := X(\gamma) \oplus X(\gamma(\alpha))$, $X_v^{(\alpha)} := X_v(\gamma) \oplus X_v(\gamma(\alpha))$.

Nun rechnen wir $\Gamma(X^{(\alpha)}) = \sup \{ \Gamma(X(\gamma)), \Gamma(X(\gamma(\alpha))) \} = e$, wobei wir Lemma 3 (2) und Lemma 4 (4) verwendet haben.

Wir sind fertig, wenn wir für $\alpha \neq \beta$ gezeigt haben, dass es keine Isometrie $X^{(\alpha)} \rightarrow X^{(\beta)}$ gibt. Nehmen wir an, f sei eine, so ergibt Lemma 2 (2) angewendet auf

¹ d.h. für alle bis auf endlich viele

$\bigcup_{\nu < \omega_1} f(X_\nu^{(\omega)}) \stackrel{\text{gl.}}{=} X^{(\beta)} \stackrel{\text{gl.}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu^{(\beta)}$, dass $C := \{\nu < \omega_1 \mid f(X_\nu^{(\omega)}) = X_\nu^{(\beta)}\}$ ein cub ist. Deshalb gilt $E(\omega) \cap C \neq E(\beta) \cap C$; wir nehmen z.B. an, es gebe ein $\nu \in E(\beta) \setminus E(\omega)$ mit $f(X_\nu^{(\omega)}) = X_\nu^{(\beta)}$. Nun ist

$$\dim X^{(\omega)} / X_\nu^{(\omega)} + X_\nu^{(\omega)} \perp = \dim X^{(\gamma) \oplus X^{(\gamma(\omega))}} / (X_\nu^{(\gamma)} + X_\nu^{(\gamma)} \perp^\gamma) \oplus (X_\nu^{(\gamma(\omega))} + X_\nu^{(\gamma(\omega))} \perp^{\gamma(\omega)})$$

$$= \dim X^{(\gamma)} / X_\nu^{(\gamma)} + X_\nu^{(\gamma)} \perp^\gamma + \dim X^{(\gamma(\omega))} / X_\nu^{(\gamma(\omega))} + X_\nu^{(\gamma(\omega))} \perp^{\gamma(\omega)} = 1 + 0 = 1$$
 , unter Verwendung von Lemma 3 (1) und Lemma 4 (2), (3). Hingegen erhalten wir $\dim X^{(\beta)} / X_\nu^{(\beta)} + X_\nu^{(\beta)} \perp = 1 + 1 = 2$. Dies ist ein Widerspruch. $\perp$

Ist man in der Aussage von Satz 2 nicht an der Fixierung der Γ -Invariante auf e interessiert, so Γ folgt die abgeschwächte Aussage direkt aus Lemma 4 (4), wenn man e die Menge $\mathcal{D}(\omega_1)$ durchlaufen lässt, deren Kardinalität nach Lemma 2 von Anhang A gleich $2^{\aleph_1}$ ist. $\perp$

Im Fall von $\text{card } k > \aleph_0$ hat H. GROSS $\aleph_2$ ganz anders geartete ¹⁾ Beispiele paarweise nichtisometrischer ε -hermitescher Räume der Dimension $\aleph_1$ über kommutativem k konstruiert, die auf [G/O] p. 513 beruhen.

Korollar Bei $\text{card } k \leq 2^{\aleph_1}$ gibt es zu jedem $e \in \mathcal{D}(\omega_1) \setminus \{0\}$ genau $2^{\aleph_1}$ Isometrietypen von ε -hermiteschen Räumen der Dimension $\aleph_1$ über $(k, *)$ mit e als Γ -Invariante.

(Dies gilt also insbesondere über den endlichen Körpern und über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.)

¹⁾ Z.B. ist die Aussage (*) nicht erfüllt (siehe Einleitung zu Lemma 5).

Die noch fehlende Abschätzung folgt daraus, dass man auf einer Basis eines κ_1 -dimensionalen k -linearen Raumes nur $(\text{card } k)^{\kappa_1} \leq (2^{\kappa_1})^{\kappa_1} = 2^{\kappa_1}$ ε -hermitesche Formen definieren kann.]

Ist $\mathcal{V}$ vom zu den endlichen Ordinalzahlen entgegengesetzten Ordnungstyp, so bemerken wir noch, dass man $X(\gamma)$ statt mit der trivialen ω -filtrierte Vektorraumstruktur auch mit der separierten ¹⁾ von [E/H] Teil I, Beweis von Theorem 2.8. versehen kann; wie dies im Detail zu geschehen hat, ist aus den zumeist parallel geführten Bezeichnungen ²⁾ ableisbar. $\Gamma(X(\gamma))$ ist unabhängig davon, welche der beiden ω -filtrierte Vektorraumstrukturen gewählt wird.

¹⁾ bezüglich der durch die ω -Filtrierung definierten Topologie

²⁾ Neu kommen hier noch die $X_{\tau+1}^{(n)}$ hinzu, die wie die $X_{\tau+1}^{(n)}$ homogen vom Grad n sein sollen; die bei [E/H] (zur einfacheren Notation, ohne gebraucht zu werden) vorkommenden $X_{\tau}^{(n)}$ für Limeszahlen τ sind zu streichen.

III. Das Kriterium der Ausschöpfungsäquivalenz

In diesem Kapitel muss k abzählbar sein.

Definitionen Sind X, Y Räume versehen mit Ausschöpfungen $X \overset{\varphi}{=} \bigcup_{v < \omega_1} X_v$ resp. $Y \overset{\varphi}{=} \bigcup_{v < \omega_1} Y_v$ und $v < \omega_1$, so ist φ -Isomorphismus eine ad hoc-Bezeichnung für einen Isomorphismus $f: X_v \rightarrow Y_v$, der $\forall \tau \leq v$ ($f(X_\tau) = Y_\tau$) erfüllt. X und Y heissen ausschöpfungsäquivalent¹⁾, falls es Ausschöpfungen gibt, die zu jedem $v < \omega_1$ einen φ -Isomorphismus erlauben.

Abkürzung $(*)$ bezeichne folgende Eigenschaft eines Raumes X : Es gibt $X \overset{\varphi}{=} \bigcup_{v < \omega_1} \tilde{X}_v$ so, dass für jedes endlichdimensionale $W \subseteq X$ für fast alle $v < \omega_1$ gilt: $W \subseteq \tilde{X}_v + \tilde{X}_v^\perp$.

Satz 3 $(MA_{\aleph_1})^2$ Für die Isomorphie zweier Räume X, Y sind hinreichend:

(1) Es gibt $X \overset{\varphi}{=} \bigcup_{v < \omega_1} X_v$ und $Y \overset{\varphi}{=} \bigcup_{v < \omega_1} Y_v$ so, dass für jedes $v < \omega_1$

- ein φ -Isomorphismus existiert und
- X_{v+1} ein Summand ist.

(2) X erfüllt $(*)$.

$\mathcal{P}$ sei die durch $\subseteq$ partiell geordnete Menge aller Restriktionen von $(\varphi+1)$ -Isomorphismen auf endlichdimensionale Teilräume von X . Man beachte, dass $\varphi, \gamma \in \mathcal{P}$ genau dann kompatibel sind, wenn $\varphi \subseteq \gamma$ und $\gamma \subseteq \varphi$ für einen geeigneten $(\varphi+1)$ -

¹ oder in der Terminologie von P.C. EKLOF: filtrierungsäquivalent

² d.h. der Beweis verwendet das mengenth. Axiom $MA_{\aleph_1}$ (siehe Anhang B)

Isomorphismus h gilt.

Wir behaupten, dass für jedes $x \in X$ die Menge $D_x := \{\gamma \in \mathcal{O} \mid x \in \text{dom } \gamma\}$ dicht in $\mathcal{O}$ ist. Dasselbe gilt dann auch für $D\gamma := \{\gamma \in \mathcal{O} \mid \gamma \in \text{ran } \gamma\} (\gamma \in \gamma)$. Seien dazu $x \in X$ und $\gamma \in \mathcal{O}$ gegeben; γ sei Restriktion des $(\tau+1)$ -Isomorphismus g . Nehme ein $\nu \geq \tau$ mit $x \in X_{\nu+1}$ sowie einen $(\nu+1)$ -Isomorphismus f . $X_{\tau+1}$ ist ein Summand; daraus folgt mit dem Modularitätsgesetz, dass für $X_{\tau+1, \nu+1} := X_{\tau+1}^\perp \cap X_{\nu+1}$ gilt: $X_{\nu+1} = X_{\tau+1} \oplus X_{\tau+1, \nu+1}$, und man sieht, dass $g \oplus f|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$ ein $(\nu+1)$ -Isomorphismus ist. Er setzt γ fort und zählt x zu seinem Definitionsbereich. Restringsiert man ihn auf $\text{dom } \gamma + kx$, so erhält man ein Element von D_x , das γ fortsetzt. »

Weiter behaupten wir, dass $\mathcal{O}$ die c.a.c. erfüllt. Dafür werden wir zwei Beweise geben, einen im Stil von [Ek2] Theorem 1.2 und einen im Stil von [E/M] p. 333 oder [E/H] Teil II Theorem 2.1, der ein anderes kombinatorisches Konzept verwendet und dieses mit Hilfe des Anhangs B modelltheoretisch formuliert.

Hier ist der erste Beweis :

Sei $A \subseteq \mathcal{O}$ überabzählbar; wir haben in A zwei kompatible Elemente zu finden. Nach (*) ist für jedes $\gamma \in \mathcal{O}$ die Menge $I_\gamma := \{\nu < \omega_1 \mid \text{dom } \gamma \not\subseteq \tilde{X}_\nu + \tilde{X}_\nu^\perp\}$ endlich. Es gibt nun ein überabzählbares $B \subseteq A$ und ein endliches $J \subseteq \omega_1$ so, dass für alle $\nu \in \omega_1 \setminus J$ gilt: $\{\gamma \in B \mid \nu \in I_\gamma\}$ ist abzählbar. Nämlich gibt es ein $n < \omega_0$ und ein überabzählbares $\tilde{B} \subseteq A$ so, dass $\forall \gamma \in \tilde{B} (\text{card } I_\gamma = n)$ und weiter ein $J \subseteq \omega_1$ maximal mit: $\{\gamma \in \tilde{B} \mid J \subseteq I_\gamma\} =: B$ ist überabzählbar; es ist $\text{card } J \leq n$. Für jedes $\nu \in \omega_1 \setminus J$ ist

$\{\gamma \in B \mid \nu \in I_\gamma\} = \{\gamma \in B \mid J \cup \{\nu\} \subseteq I_\gamma\}$, und dies ist wegen der Maximalität von J abzählbar. $\square$

Nach Lemma 2 (2) ist $C := \{\nu \in \lim(\omega_\lambda)^3 \setminus J \mid X_\nu = \tilde{X}_\nu\}$ ein cub. Die getroffenen Vorbereitungen garantieren die Existenz einer injektiven Funktion $C \rightarrow B(\subseteq A) : \nu \mapsto \gamma_\nu$ so, dass $\forall \nu \in C (\text{dom } \gamma_\nu \subseteq X_\nu + X_\nu^\perp)$. Für $\nu \in C$ ist $R_\nu := \{\mu \in \nu \mid \text{dom } \gamma_\nu \subseteq X_\mu + X_\nu^\perp\}$ nichtleer, und wegen der endlichen Dimension von $\text{dom } \gamma_\nu$ ist $\min R_\nu$ eine Nachfolgerzahl, also $< \nu$; mithin ist die Funktion $C \rightarrow \omega_\lambda : \nu \mapsto \min R_\nu$ regressiv, sodass nach FODORS Theorem (siehe [Kun] p. 80) ein stationäres $E \subseteq C$ und ein $\mu < \omega_\lambda$ mit $\forall \nu \in E (\text{dom } \gamma_\nu \subseteq X_\mu + X_\nu^\perp)$ existieren. Da $\{F \subseteq X_\mu \mid \dim F < \kappa_0\}$ abzählbar ist ¹⁾, gibt es solch ein F und ein überabzählbares $\tilde{E} \subseteq E$ mit $\forall \nu \in \tilde{E} (\text{dom } \gamma_\nu \subseteq F + X_\nu^\perp)$.

Zu jedem $\nu \in \tilde{E}$ wählen wir einen $(\sigma_\nu + 1)$ -Isomorphismus f_ν so, dass γ_ν Restriktion von f_ν ist, wobei wir nach dem Dichtheitsbeweis noch $\forall \nu \in \tilde{E} (\nu < \sigma_\nu + 1)$ annehmen werden. Da jedes f_ν F in γ_μ abbildet, es wegen der Abzählbarkeit von γ_μ ¹⁾ aber nur abzählbar viele solche lineare Abbildungen gibt, gibt es ein überabzählbares $\tilde{E} \subseteq \tilde{E}$ mit $\forall \tau, \nu \in \tilde{E} (f_\tau \upharpoonright F = f_\nu \upharpoonright F)$. Da $\tilde{E}$ als überabzählbare Teilmenge von ω_λ konfinal mit ω_λ ist, können wir $\tau, \nu \in \tilde{E}$ wählen mit :
 $\mu < \tau < \sigma_\tau + 1 < \nu < \sigma_\nu + 1$.

Nun ist $\text{dom } \gamma_\nu \subseteq F + X_\nu^\perp \subseteq F + X_{\sigma_\tau + 1}^\perp \stackrel{2)}{=} F \oplus X_{\sigma_\tau + 1}^\perp$,

¹⁾ Hier geht die vorausgesetzte Abzählbarkeit von κ ein.

²⁾ Da $X_{\sigma_\tau + 1}$ Summand ist und da $F \subseteq X_\mu \subseteq X_{\sigma_\tau + 1}$ wegen $\mu < \sigma_\tau + 1$.

³⁾ $\lim(\omega_\lambda) := \{\nu < \omega_\lambda \mid \nu \text{ ist Limeszahl}\}$.

also $\text{dom } \gamma_\nu \subseteq F \otimes_{\mathcal{O}} X_{\tau+1, \nu+1} \subseteq X_{\tau+1}$, also $\gamma_\nu \subseteq f_\nu|_F \otimes f_\nu|_{X_{\tau+1, \nu+1}} \subseteq f_\tau \otimes f_\nu|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$, und andererseits $\gamma_\tau \subseteq f_\tau \subseteq f_\tau \otimes f_\nu|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$; da $f_\tau \otimes f_\nu|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$ $(\tau+1)$ -Isomorphismus ist, sind γ_τ, γ_ν kompatibel.]

Im zweiten Beweis sind die kombinatorischen Argumente (die auch für viele verwandte c.a.c.-Beweise übernommen werden können) in den Anhang B abgeschoben, sodass die auf die hier betrachteten Räume zugeschnittenen Schritte klarer hervortreten:

Nach den Lemmata 5, 6 und 7 im Anhang B sind folgende Klassen cubs in $[W]^\omega$: $\mathcal{N}_1 := \{N \in \mathcal{N}_0 \mid \{k, X \oplus Y, +, \cdot, (X_\nu \oplus Y_\nu)_{\nu < \omega_1}\} \in N\}$, $\mathcal{N}_2 := \{N \in \mathcal{N}_1 \mid X_{\omega_1 \cap N} = \tilde{X}_{\omega_1 \cap N}\}$, $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{N}_2 \mid \exists (N(n))_{n < \omega_0} \text{ in } \mathcal{N}_2 (N = \bigcup_{n < \omega_0} N(n) \wedge \forall n < m < \omega_0 (N(n) \subseteq N(m) \wedge \omega_1 \cap N(n)^1 < \omega_1 \cap N(m)))\}$. Auf $\mathcal{N}$ und $\mathcal{O}$ wollen wir das Hauptlemma des Anhangs B anwenden. Dazu seien $N \in \mathcal{N}$ und $D \in \mathcal{N}$ mit $D \cap N$ dicht in $\mathcal{O} \cap N$ gegeben sowie ein $q \in \mathcal{O}$, Restriktion eines $(\nu+1)$ -Isomorphismus f ; nach dem Dichtheitsbeweis werden wir $\omega_1 \cap N^1 < \nu+1$ annehmen. Wir haben ein mit q kompatibles $\gamma \in D \cap N$ zu finden.

Nach Definition von $\mathcal{N}$ ist $N = \bigcup_{n < \omega_0} N(n)$ für gewisse $N(n) \in \mathcal{N}_2$, von denen wir noch $D \in N(n)$ voraussetzen können, sodass nach zweimaliger Anwendung von (12) im Anhang B jedes $D \cap N(n)$ dicht in $\mathcal{O} \cap N(n)$ ist. Da $\{\omega_1 \cap N(n) \mid n < \omega_0\}$ abzählbar ist, gibt es nach (*) ein $n < \omega_0$ so, dass $\text{dom } q \subseteq \tilde{X}_{\omega_1 \cap N(n)} + \tilde{X}_{\omega_1 \cap N(n)}^\perp$, und für ein endlichdimensionales $F \subseteq$

¹ ist nach (5) von Anhang B (Limes-)Ordinalzahl.

$\tilde{X}_{\omega_1 \cap N(n)}$ ist dann $\text{dom } \varphi \subseteq F + \tilde{X}_{\omega_1 \cap N(n)}^\perp$, oder unter Beachtung der Definition von $\mathcal{N}_2$: $\text{dom } \varphi \subseteq F + X_{\omega_1 \cap N(n)}^\perp$. Es ist $f|_F \in \{\gamma \in \mathcal{P} \mid \gamma \subseteq X_{\omega_1 \cap N(n)} \oplus Y_{\omega_1 \cap N(n)}\} = \mathcal{P} \cap N(n)$ nach (8) im Anhang B; also ist $f|_F \subseteq \gamma$ für ein $\gamma \in \mathcal{D} \cap N(n)$.

γ ist Restriktion eines $(\tau+1)$ -Isomorphismus g , wobei wir wegen $\text{dom } \gamma \subseteq X_{\omega_1 \cap N(n)}$ und der endlichen Dimension von $\text{dom } \gamma$ annehmen können: $\tau+1 < \omega_1 \cap N(n)$. Nun ist $\text{dom } \varphi \subseteq F + X_{\omega_1 \cap N(n)}^\perp \subseteq F + X_{\tau+1}^\perp \stackrel{1)}{=} F \oplus X_{\tau+1}^\perp$, also $\text{dom } \varphi \subseteq F \oplus X_{\tau+1, \nu+1} \subseteq X_{\nu+1}$, also $\varphi \subseteq f|_F \oplus f|_{X_{\tau+1, \nu+1}} \subseteq g \oplus f|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$. Andererseits $\gamma \subseteq g \subseteq g \oplus f|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$; da $g \oplus f|_{X_{\tau+1, \nu+1}}$ ein $(\nu+1)$ -Isomorphismus ist, sind φ, γ kompatibel. $\square$

Nun kann man $\text{MA}_{\mathcal{K}_1}$ auf die Familie $\{D_x \mid x \in X\} \cup \{D_Y \mid Y \in \mathcal{Y}\}$ anwenden und erhält ein gerichtetes $G \subseteq \mathcal{P}$ mit $\forall x \in X (D_x \cap G \neq \emptyset)$ und $\forall Y \in \mathcal{Y} (D_Y \cap G \neq \emptyset)$. $g := \bigcup G$ erfüllt dann $\text{dom } g = X$ und $\text{ran } g = Y$. g ist eine Bijektion; dass g eine Funktion ist, folgt (mit vertauschten Rollen von $\text{dom } g$ und $\text{ran } g$) genauso wie die Injektivität von g , die wir zusammen damit zeigen werden, dass g isomorph ist: Seien $\lambda \in k$ und $x_1, x_2 \in \text{dom } g$ beliebig; es gibt dann $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ mit $x_i \in \text{dom } \gamma_i$ ($i=1,2$), und wegen der Gerichtetheit von G hat man $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq \gamma$ für ein $\gamma \in G$, sodass $x_1, x_2, \lambda x_1, x_1 + x_2 \in \text{dom } \gamma$. Da γ injektiv und isomorph ist, gelten;

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \gamma(x_1) \neq \gamma(x_2) \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.
- $g(\lambda x_1) = \gamma(\lambda x_1) = \lambda \gamma(x_1) = \lambda g(x_1)$.

¹ Da $X_{\tau+1}$ Summand ist und da $F \subseteq \text{dom } \gamma \subseteq X_{\tau+1}$.

- $g(x_1 + x_2) = \gamma(x_1 + x_2) = \gamma(x_1) + \gamma(x_2) = g(x_1) + g(x_2).$
- $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle \gamma(x_1), \gamma(x_2) \rangle = \langle g(x_1), g(x_2) \rangle.$
- Für jedes $\alpha \in \mathcal{V} : x_\alpha \in X^\alpha \iff \gamma(x_\alpha) \in Y^\alpha \iff g(x_\alpha) \in Y^\alpha.$

Insgesamt ist g also ein Isomorphismus $X \rightarrow Y.$

Korollar (HA_{K_1}) Für die Isomorphie zweier K_1 -dimensionaler Räume X und Y sind folgende Bedingungen hinreichend :

- (1) X und Y sind ausschöpfungsäquivalent.
- (2) $\Gamma(X) \neq 1.$
- (3) X erfüllt $(*)$.

$\Gamma X \overset{\text{LH}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$ und $Y \overset{\text{LH}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} Y_\nu$ seien Ausschöpfungen, zu denen $\mathcal{V}$ -Isomorphismen existieren, die X und Y ausschöpfungsäquivalent machen. Nach Satz 1 (2) gilt nun für eine geeignete normale Funktion $h : \omega_1 \rightarrow \omega_1 : \forall \nu < \omega_1$ ($X_{h(\nu+1)}$ ist ein Summand). $X = \bigcup_{\nu < \omega_1} X_{h(\nu)}$ und $Y = \bigcup_{\nu < \omega_1} Y_{h(\nu)}$ sind nach Lemma 2 (1) Ausschöpfungen, und zusammen mit den $h(\nu)$ -Isomorphismen erfüllen sie die Voraussetzungen von Satz 3.]

Vergleich mit [E/H] : Statt $\Gamma(X) \neq 1$ steht in [E/H] (und auch in [Ek2], [E/M]) an entsprechender Stelle : X ist schwach K_1 -separabel, welche Bedingung in der hiesigen Situation jedoch unbrauchbar ist; siehe auch den Vergleich auf p. 9.

Beispiel Sei γ ein Leiternsystem auf E (Die Bezeichnung ist am Anfang des Kapitels II eingeführt.). Zwei Kopien

des im Kapitel II definierten Raumes $X(\gamma)$ erfüllen nach Lemma 4 (3) und Lemma 5 bezüglich der naheliegenden Ausschöpfungen und $\vee$ -Isomorphismen alle Voraussetzungen des Satzes 3, bei $E^\sim \neq 1$ auch des Korollars.

Der Beweis von Satz 3 kommt tatsächlich nicht ohne ein zusätzliches Axiom zu $\exists FC$ aus, denn unter Annahme von $\mathbb{V} = \mathbb{L}$ statt $\mathbb{MA}_{\aleph_1}$ gilt folgende zu Satz 3 widersprüchliche Aussage :

Satz 4 ($\mathbb{V} = \mathbb{L}^1$) Zu jedem $e \in \mathcal{P}(\omega_1) \setminus \{0\}$ (siehe Anhang A) gibt es rein $\mathcal{E}$ -hermitesche $\aleph_1$ -dimensionale ²⁾ Räume X, Y über $(k, \star)$ mit $\Gamma(X) = \Gamma(Y) = e$, die $(\star)$ erfüllen und ausschöpfungsäquivalent aber nicht isometrisch sind.

Wir wählen E und γ so, dass $E^\sim = e$ und dass γ ein Leiternsystem auf E ist. Wir lassen " γ " weg bei " $X(\gamma)$ ", " $X_\gamma(\gamma)$ ", " $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ ", " $\perp_\gamma$ ", " $m_{\gamma, \mu}$ " und " $u_{\gamma, \mu}$ " (Bezeichnungen am Anfang des Kapitels II). Y wird eine Variante von X sein, Teilraum des rein $\mathcal{E}$ -hermiteschen Raumes $\tilde{Y}$ (der auch X umfassen wird), zu dessen Definition wir $\{x_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0\} \cup \{\hat{x}_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau < \omega_1 \wedge n < \omega_0\} \cup \{\gamma_\mu \mid \mu \in E\}$ noch um $\{\hat{\gamma}_\mu \mid \mu \in E\}$ zu einem System von k -linear unabhängigen Vektoren erweitern :

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &:= B \oplus \bigoplus_{\mu \in E} (k\gamma_\mu \oplus k\hat{\gamma}_\mu), \\ \tilde{Y}_v &:= B_v \oplus \bigoplus_{\mu \in E, \mu < v} (k\gamma_\mu \oplus k\hat{\gamma}_\mu), \quad (v < \omega_1)\end{aligned}$$

¹ Es genügt $\hat{\phi}(E)$ für ein $E \subseteq \omega_1$ mit $E^\sim = e$ (siehe Anhänge A und C).

² Da k abzählbar ist, gilt dann auch $\text{card } X = \text{card } Y = \aleph_1$.

also $\tilde{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{v < \omega_1} \tilde{Y}_v$. $\tilde{Y}$ wird dadurch zum ε -hermiteschen Raum, dass die Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X erweitert wird um :

$$\left. \begin{aligned} \langle x_{\tau+1}^{(n)}, \hat{y}_\mu \rangle &:= 0, \\ \langle \hat{x}_{\tau+1}^{(n)}, \hat{y}_\mu \rangle &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } \tau+1 = y_\mu(n) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \langle \hat{y}_\tau, \hat{y}_\mu \rangle &:= 0, \\ \langle y_\tau, \hat{y}_\mu \rangle &:= \begin{cases} \text{card}\{m < \omega_1 \mid y_\tau(m) = y_\mu(m)\} & \text{falls } \tau \neq \mu \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} \tau < \omega_1, \\ n < \omega_0, \\ \mu \in E \end{array} \right) \\ & \left(\tau, \mu \in E \right) \end{aligned}$$

Für $v < \mu < \omega_1$ sei $\hat{u}_{v,\mu} := \varepsilon \sum_{0 \leq m \leq m_{v,\mu}} x_{y_\mu(m)}^{(m)}$. Kommt eine Variable y mit und ohne " $\hat{}$ " vor, so schreiben wir auch $\hat{y}$ für y und $\check{y}$ für $\hat{y}$. Für $s \in \{0,1\}$ sei $0' := 1, 1' := 0$.

Zunächst überlegen wir uns für jedes $v \in E$, dass zu keinem isometrischen $g : X_v \rightarrow \tilde{Y}$ (d.h. $g : X_v \rightarrow g(X_v)$ ist eine Isometrie) mit $B_v \subseteq g(X_v) \subseteq \tilde{Y}_v$ gleichzeitig für $s = 0$ und $s = 1$ isometrische Erweiterungen $\hat{f} : X_{v+1} \rightarrow \tilde{Y}$ so existieren, dass von $\hat{f}(y_v)$ die $\check{y}_v$ -Komponente gleich 0, die $\hat{y}_v$ -Komponente aber verschieden von 0 ist : "Unter der Gegenannahme gilt für $s = 0$ und $s = 1$, dass unendlich viele $x \in \{\hat{x}_{\tau+1}^{(n)} \mid \tau+1 < v \wedge n < \omega_0\}$ erfüllen : $x \not\perp \hat{f}(y_v)$, jedoch nur endlich viele davon : $x \perp \hat{f}(y_v)$, im Widerspruch dazu, dass unter $\hat{f} \circ \hat{f}^{-1} : x \mapsto x, \hat{f}(y_v) \mapsto \hat{f}(y_v)$."

Für jedes $v \in E$ können wir nun eine Partitionsfunktion $\mathcal{V}_v : \{g \mid g : X_v \rightarrow \tilde{Y}\} \rightarrow \{0,1\}$ so nehmen, dass für isometrisches $g : X_v \rightarrow \tilde{Y}$ mit $B_v \subseteq g(X_v) \subseteq \tilde{Y}_v$ gilt : $\mathcal{V}_v(g) = s'$, falls g eine isometrische Erweiterung $\hat{f} : X_{v+1} \rightarrow \tilde{Y}$ so zulässt, dass von $\hat{f}(y_v)$ die $\check{y}_v$ -Komponente gleich 0, die $\hat{y}_v$ -Komponente aber verschieden von 0 ist. Anwendung der

2. Version von $\phi(E)$ liefert ein $\phi: E \rightarrow \{0,1\}$, mit dessen Hilfe wir γ definieren:

$$\gamma := B \oplus \bigoplus_{\mu \in E} k \tilde{\gamma}_{\mu}^{(v)}$$

$$\gamma_v := B_v \oplus \bigoplus_{\mu \in E, \mu < v} k \tilde{\gamma}_{\mu}^{(v)} \quad (v \in E)$$

dann ist $\gamma \neq \bigcup_{v < \omega_1} \gamma_v$, $\gamma_v \subseteq \tilde{\gamma}_v$, $\gamma \subseteq \tilde{\gamma}$.

Wir führen die Annahme einer Isometrie $f: X \rightarrow Y$ zum Widerspruch: Nach $\phi(E)$ ist $\{v \in E \mid \gamma_v(f|_{X_v}) = \phi(v)\}$ stationär, und nach Lemma 2 (2) gibt es ein $v \in E$ mit $f(X_v) = \gamma_v$ und $\gamma_v(f|_{X_v}) = \phi(v)$. $f|_{X_v}: X_v \rightarrow \tilde{\gamma}$ ist dann isometrisch mit $B_v \subseteq f(X_v) \subseteq \tilde{\gamma}_v$, und $f|_{X_{v+1}}$ ist isometrische Erweiterung: $X_{v+1} \rightarrow \tilde{\gamma}$, wobei $f|_{X_{v+1}}(\gamma_v) = f(\gamma_v)$ wegen $f(\gamma_v) \in \gamma$ die $\tilde{\gamma}_v^{(v)}$ -Komponente gleich 0, nach dem Lemma 6¹⁾ hingegen die $\phi(v)$ -Komponente verschieden von 0 besitzt. Nach Definition von γ_v müsste dann aber $\gamma_v(f|_{X_v}) = \phi(v)$ sein.]

Um induktiv nachzuweisen, dass X und Y hingegen ausschöpfungsäquivalent sind, zeigen wir sogar: Für alle $\tau < v < \omega_1$ kann jeder $(\tau+1)$ -Isomorphismus g zu einem $(v+1)$ -Isomorphismus f erweitert werden, der im Fall einer Nachfolgerzahl v für beliebig gewähltes $s \in \{0,1\}$ und für alle $n < \omega_0$ erfüllt: $f(x_v^{(n)}) = \hat{x}_v^{(n)} \wedge f(\hat{x}_v^{(n)}) = \varepsilon^s \hat{x}_v^{(n)}$; die Induktion geht über v , für alle $\tau < v$. Ist v Nachfolgerzahl, so kann man nach Induktionsvoraussetzung $v = \tau + 1$ annehmen, und der Schritt geht wegen $\langle x_v^{(n)}, \hat{x}_v^{(n)} \rangle = \langle \hat{x}_v^{(n)}, \varepsilon^s \hat{x}_v^{(n)} \rangle$

¹ Die Lemmata 6 und 7 sind diesem Beweis hintangestellt.

problemlos. Ist $\nu \in E$, so gibt es nach der Induktionsvoraussetzung sukzessive Erweiterungen $(f_n)_{m_{\nu+1, \nu} < n < \omega_0}$ von g , wo $f_n (y_\nu(n))$ -Isomorphismus ist mit $f_n(x_{y_\nu(n)}^{(n)}) = x_{y_\nu(n)}^{(n)}$ $\wedge$ $f_n(\hat{x}_{y_\nu(n)}^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} x_{y_\nu(n)}^{(n)}$. $f_{\omega_0} := \bigcup_{n < \omega_0} f_n$ ist dann ν -Isomorphismus mit: $\forall n$ mit $m_{\nu+1, \nu} < n < \omega_0$ ($f_{\omega_0}(x_{y_\nu(n)}^{(n)}) = x_{y_\nu(n)}^{(n)}$ $\wedge$ $f_{\omega_0}(\hat{x}_{y_\nu(n)}^{(n)}) = \varepsilon^{(n)} x_{y_\nu(n)}^{(n)}$). Durch $f(y_\nu - u_{\nu+1, \nu}) := y_\nu - u_{\nu+1, \nu}$ ist nach Lemma 7 eine Erweiterung von f_{ω_0} definiert, die $(\nu+1)$ -Isomorphismus ist. Ist schliesslich ν Limeszahl mit $\nu \notin E$, so ist der Induktionsschritt ein Teil desjenigen bei $\nu \in E$.]

Mit Lemma 1 (2) sieht man, dass sich die Eigenschaft, (k)ein Summand im ganzen Raum zu sein, von den X_ν auf die Y_ν mittels der μ -Isomorphismen mit $\mu > \nu$ überträgt; deshalb gilt $\Gamma(Y) = \Gamma(X) = E^\sim$. Ebenfalls übertragen die ν -Isomorphismen die Eigenschaft (*) von X auf Y . (Diese beiden Resultate erhält man auch dadurch, dass man erst ein Analogon zu Lemma 4 für Y beweist.)]

Wir fügen noch die im Beweis des obigen Satzes verwendeten Lemmata an. Die linke Kolumne stützt sich jeweils auf teils dieselben Rechnungen wie Lemma 4; bei Lemma 6 ist sie direkt daraus herleitbar. Für die rechte Kolumne gilt beidemal dasselbe in Bezug auf ein (hier nicht benötigtes) Analogon zu Lemma 4.

Lemma 6 Für alle $\nu \in E$ gelten die beiden Kolumnen :

(1) X_ν ist kein Summand in $X_\nu + kY_\nu (= X_{\nu+1})$.	(1) Y_ν ist kein Summand in $Y_\nu + kY_\nu (= Y_{\nu+1})$.
(2) Ist die Y_ν -Kom-	(2) Ist die $Y_\nu^{q_\nu}$ -Kom-

ponente von $\gamma \in X$ gleich 0, | ponente von $\gamma \in Y$ gleich 0,
so ist X_ν Summand in $X_\nu + k\gamma$. | so ist Y_ν Summand in $Y_\nu + k\gamma$.

Wir beweisen die rechte Kolumne; die linke erhalten wir dadurch, dass wir uns statt ϕ die Funktion $E \rightarrow \{0,1\}$:
 $\nu \mapsto 0$ denken und Y_ν durch X_ν ersetzen.

Für (1) nehmen wir an, $x + \lambda \tilde{\gamma}_\nu^{(\phi)}$ (wobei $x \in Y_\nu$ und $\lambda \in k$) erfülle $Y_\nu \perp x + \lambda \tilde{\gamma}_\nu^{(\phi)}$. Für ein $n < \omega_\nu$ ist $X_{\gamma_\nu(n)}^{(\phi_\nu(n))} \perp x$. Dann

$$\underbrace{\langle X_{\gamma_\nu(n)}^{(\phi_\nu(n))}, x + \lambda \tilde{\gamma}_\nu^{(\phi)} \rangle}_{=0} = \underbrace{\langle X_{\gamma_\nu(n)}^{(\phi_\nu(n))}, x \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle X_{\gamma_\nu(n)}^{(\phi_\nu(n))}, \tilde{\gamma}_\nu^{(\phi)} \rangle}_{=1} \lambda^n, \text{ d.h.}$$

es muss $\lambda = 0$ sein. Dies beweist schon die Behauptung.

Bei (2) genügt es zu zeigen, dass man zu jeder Komponente $\tilde{\gamma}$ von γ ein Element x von Y_ν so findet, dass $Y_\nu \perp \tilde{\gamma} - x$:

- Ist $\tilde{\gamma} \in Y_\nu$, so genügt $x := \tilde{\gamma}$.
- Ist $\tilde{\gamma} \in B_\nu^1$, so genügt $x := 0$.
- Ist $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_\mu^{(\phi_\mu)}$ für ein $\mu > \nu$, so nehmen wir $x :=$

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}_{\gamma_\nu/\mu}^{(\phi_\nu)} . \text{ Dann gilt nämlich } B_\nu \perp \tilde{\gamma} - x, \text{ und für } \tau < \nu \text{ haben wir} \\ & \langle \tilde{\gamma}_\tau^{(\phi_\tau)}, \tilde{\gamma} - x \rangle = \underbrace{\langle \tilde{\gamma}_\tau^{(\phi_\tau)}, \tilde{\gamma}_\mu^{(\phi_\mu)} \rangle}_{= \sum \phi_\tau(\tau) \cdot \text{card} \{m < \omega, |y_\tau(m) = y_\mu(m)\}} - \sum_{0 \leq m \leq m_{\nu/\mu}} \underbrace{\langle \tilde{\gamma}_\tau^{(\phi_\tau)}, x_\mu^{(\phi_\mu)} \rangle}_{= \begin{cases} \phi_\tau(\tau) & \text{falls } y_\tau(m) = y_\mu(m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \cdot \phi_\mu^{(\mu)}(m) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Dabei beziehen sich die Ausrechnungen unter den Klammern auf den Fall $\phi(\tau) \neq \phi(\mu)$; bei $\phi(\tau) = \phi(\mu)$ muss jeweils 0 stehen. $\perp$

Lemma 7 Für alle $\nu \in E$ und $\tau < \nu$ gelten folgende beide Kolumnen:

¹ Der Schluss benötigt noch: $y_\tau(m) = y_\mu(m) \Rightarrow y_\mu(m) < \nu \Rightarrow m \leq m_{\nu/\mu}$.

$$\text{Mit } Z := \bigoplus_{\substack{\mu < \nu \\ \wedge 0 \leq n \leq m_{\tau+1, \nu}}} (kx_{\mu+1}^{(n)} \oplus k\hat{x}_{\mu+1}^{(n)})$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{\mu < \nu \\ \wedge m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0 \\ \wedge \mu+1 \neq \gamma_\nu(n)}} (kx_{\mu+1}^{(n)} \oplus k\hat{x}_{\mu+1}^{(n)})$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{\mu \in E \\ \wedge \mu < \nu}} k[y_\mu - \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \wedge y_\mu(m) = y_\nu(m)}} \hat{x}_{\mu}^{(m)}]$$

($\subseteq X$) haben wir :

$$(1) \quad X_\nu = \bigoplus_{m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0}$$

$$(kx_{\gamma_\nu(n)}^{(n)} \oplus k\hat{x}_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}) \oplus Z.$$

$$(2) \quad \forall n \text{ mit } m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0$$

$$(\langle x_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\nu - u_{\tau+1, \nu} \rangle = 1 \wedge$$

$$\langle \hat{x}_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\nu - u_{\tau+1, \nu} \rangle = 0).$$

$$(3) \quad Z \perp y_\nu - u_{\tau+1, \nu}.$$

$$\text{Mit } Z := \bigoplus_{\substack{\mu < \nu \\ \wedge 0 \leq n \leq m_{\tau+1, \nu}}} (kx_{\mu+1}^{(n)} \oplus k\hat{x}_{\mu+1}^{(n)})$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{\mu < \nu \\ \wedge m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0 \\ \wedge \mu+1 \neq \gamma_\nu(n)}} (kx_{\mu+1}^{(n)} \oplus k\hat{x}_{\mu+1}^{(n)})$$

$$\oplus \bigoplus_{\substack{\mu \in E \\ \wedge \mu < \nu}} k[y_\mu - \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \wedge y_\mu(m) = y_\nu(m)}} x_{\mu}^{(m)}]$$

($\subseteq Y$) haben wir :

$$(1) \quad Y_\nu = \bigoplus_{m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0}$$

$$(kx_{\gamma_\nu(n)}^{(n)} \oplus k\hat{x}_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}) \oplus Z.$$

$$(2) \quad \forall n \text{ mit } m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0$$

$$(\langle x_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\nu - u_{\tau+1, \nu} \rangle = 1 \wedge$$

$$\langle \hat{x}_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\nu - u_{\tau+1, \nu} \rangle = 0).$$

$$(3) \quad Z \perp y_\nu - u_{\tau+1, \nu}.$$

Wir beweisen die rechte Kolumne; die linke erhalten wir dadurch, dass wir uns statt ϕ die Funktion $E \rightarrow \{0, 1\}$: $\nu \mapsto 0$ denken und Y_ν durch X_ν ersetzen.

Bei (1) überzeugen wir uns schnell, dass eine direkte Summenzerlegung von Y_ν vorliegt, und es bleibt "1" zu verifizieren. Dabei ist von den drei Summanden von Z nur der letzte näher zu untersuchen; seien also n mit $m_{\tau+1, \nu} < n < \omega_0$ und μ mit $\mu \in E$ und $\mu < \nu$ gegeben :

$$\begin{aligned} & \langle x_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\mu - \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \wedge y_\mu(m) = y_\nu(m)}} x_{\mu}^{(m)} \rangle \\ &= \underbrace{\langle x_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\mu \rangle}_{= \begin{cases} 1 & \text{falls } y_\mu(n) = y_\nu(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} - \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \wedge y_\mu(m) = y_\nu(m)}} \underbrace{\langle x_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, x_{\mu}^{(m)} \rangle}_{= \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \text{ (da } y_\mu(m) = y_\nu(m)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \varepsilon^{\phi(\mu)} = 0, \end{aligned}$$

und sicher $\langle x_{\gamma_\nu(n)}^{(n)}, y_\mu - \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \wedge y_\mu(m) = y_\nu(m)}} x_{\mu}^{(m)} \rangle = 0.$

(2) wird sofort klar.

Bei (3) seien für den ersten Summanden von $\sum_{\mu < \nu}$ und n mit $0 \leq n \leq m_{\tau+1, \nu}$ gegeben: $\langle \tilde{X}_{\mu+1}^{(\nu)}(n), \tilde{Y}_{\nu} - \tilde{U}_{\tau+1, \nu}^{(\nu)} \rangle =$

$$\underbrace{\langle \tilde{X}_{\mu+1}^{(\nu)}(n), \tilde{Y}_{\nu} \rangle}_{= \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu+1 = \gamma_{\nu}(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} - \sum_{0 \leq m \leq m_{\tau+1, \nu}} \underbrace{\langle \tilde{X}_{\mu+1}^{(\nu)}(n), \tilde{Y}_{\gamma_{\nu}(m)}^{(\nu)} \rangle}_{= \begin{cases} 1 & \text{falls } n=m \wedge \mu+1 = \gamma_{\nu}(m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \varepsilon^{\phi(\nu)} = 0,$$

 und sicher $\langle \tilde{X}_{\mu+1}^{(\nu)}(n), \tilde{Y}_{\nu} - \tilde{U}_{\tau+1, \nu}^{(\nu)} \rangle = 0$. Der zweite Summand ist
 problemlos, und für den dritten sei μ mit $\mu \in E$ und $\mu < \nu$ ge-
 geben: $\langle \tilde{X}_{\mu}^{(\nu)} - \varepsilon^{\phi(\mu)} \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \gamma_{\mu}(m) = \gamma_{\nu}(m)}} \tilde{X}_{\gamma_{\mu}(m)}^{(\nu)}, \tilde{Y}_{\nu} - \tilde{U}_{\tau+1, \nu}^{(\nu)} \rangle = \underbrace{\langle \tilde{X}_{\mu}^{(\nu)}, \tilde{Y}_{\nu} \rangle}_{= \varepsilon^{\phi(\mu)} \text{card} \{m < \omega_0 \mid \gamma_{\mu}(m) = \gamma_{\nu}(m)\}} -$

$$\sum_{0 \leq m \leq m_{\tau+1, \nu}} \underbrace{\langle \tilde{X}_{\mu}^{(\nu)}, \tilde{X}_{\gamma_{\nu}(m)}^{(\nu)} \rangle}_{= \begin{cases} \varepsilon^{\phi(\mu)} & \text{falls } \gamma_{\mu}(m) = \gamma_{\nu}(m) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \varepsilon^{\phi(\nu)} - \varepsilon^{\phi(\mu)} \sum_{\substack{m_{\tau+1, \nu} < m < \omega_0 \\ \gamma_{\mu}(m) = \gamma_{\nu}(m)}} \underbrace{\langle \tilde{X}_{\gamma_{\mu}(m)}^{(\nu)}, \tilde{Y}_{\nu} \rangle}_{= 1 \text{ (da } \gamma_{\mu}(m) = \gamma_{\nu}(m))}$$

$$+ \underbrace{\dots}_{= 0} = 0; \text{ dabei beziehen sich die Ausrech-}$$

 nungen unter den Klammern wieder auf den Fall $\phi(\mu) \neq \phi(\nu)$;
 andernfalls müsste stets 0 stehen.]

Kommentar zur Bedingung (*) von Satz 3: Wir denken
 uns " $W \subseteq \tilde{X}_{\nu} + \tilde{X}_{\nu}^{\perp}$ " mit dem Modularitätsgesetz umformu-
 liert zu " $\tilde{X}_{\nu}$ ist Summand in $\tilde{X}_{\nu} + W$ ". (*) wird in beiden
 c.q.c.-Beweisen verwendet und zwar so wesentlich, dass man
 innerhalb jedes der kombinatorischen Konzepte nicht ohne aus-
 kommt. Bei den Satz 3 entsprechenden Theoremen in [E/H] (Teil
 II Theorem 2.1), [Ek2] und [E/M] muss man (*) nicht voraus-
 setzen, da es in den dortigen Kategorien der ω -filtrierte
 Vektorräume resp. gewisser abelscher Gruppen stets erfüllt ist.
 Dies folgt jeweils daraus, dass " $\tilde{X}_{\nu}$ ist Summand in $\tilde{X}_{\nu} + W$ "
 äquivalent ist zu " $\tilde{X}_{\nu}$ ist abgeschlossen in $\tilde{X}_{\nu} + W$ " für eine

geeignete Topologie, und ist die Ausschöpfung günstig gewählt, so ist dies wieder äquivalent zu " $\tilde{X}_{v+1} \cap W = \tilde{X}_v \cap W$ ", was für fast alle $v < \omega_1$ erfüllt ist. In der hiesigen Situation kann man " $\tilde{X}_v$ ist Summand in $\tilde{X}_v + W$ " nicht ersetzen durch " $\tilde{X}_{v+1} \cap W = \tilde{X}_v \cap W$ ", denn es ist an den $X(\eta)$ ersichtlich, dass das zweite das erste nicht impliziert.

Es gibt nun tatsächlich (rein $\mathfrak{L}$ -hermitesche) Räume, die (*) nicht erfüllen, z.B. solche mit einem abzählbardimensionalen Teilraum Z mit $Z^\perp = \{0\}$; nach H. GROSS erfüllen die auf p. 7 angeführten Räume ebenfalls nicht (*).

Anhang A

Die Boolesche Algebra $\mathcal{I}(\omega_1)$

Die folgenden Definitionen stehen in jedem neueren Lehrbuch über Mengenlehre erläutert, z.B. in [Kun] pp. 76 ff.

Eine Teilmenge C von ω_1 heisst cub (eine Abkürzung für closed unbounded), falls $\forall (v(u))_{u < \omega_0}$ aufsteigend in C ($\sup \{v(u) \mid u < \omega_0\} \in C$) und falls C in ω_1 unbeschränkt ist. Eine Funktion $h: v \rightarrow \omega_1$, wo $v < \omega_1$, heisst normal, falls sie monoton wächst und falls $\forall (v(n))_{n < \omega_0}$ aufsteigend in v ($h(\sup \{v(n) \mid n < \omega_0\}) = \sup \{h(v(n)) \mid n < \omega_0\}$). Die cub's sind genau die Bilder der auf ganz ω_1 definierten normalen Funktionen.

Für zwei Teilmengen E und F von ω_1 schreiben wir $E \sim F$, wenn es ein cub C mit $E \cap C = F \cap C$ gibt. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation; die Äquivalenzklasse von $E \subseteq \omega_1$ bezeichnen wir mit $E^\sim$. E heisst stationär, falls $E \notin \mathcal{I}(\omega_1)$ $:= \{E \subseteq \omega_1 \mid E \sim \emptyset\} = \{E \subseteq \omega_1 \mid E \text{ ist zu einem cub disjunkt}\}$. Da der Durchschnitt zweier cub's wieder eines ist, ist $\mathcal{I}(\omega_1)$ ein Ideal in der Booleschen Algebra $\mathcal{P}(\omega_1)$; seine Elemente heissen dünne Mengen. $\mathcal{D}(\omega_1) := \omega_1 / \mathcal{I}(\omega_1) = \omega_1 / \sim = \{E^\sim \mid E \subseteq \omega_1\}$ ist also eine Boolesche Algebra.

Lemma 1 (Solovay) *Jede stationäre Menge lässt sich als disjunkte Vereinigung von $\aleph_1$ vielen stationären Mengen darstellen.*

┌ Einen Beweis findet man z.B. in [Kun] p. 79 nach 6.12. ┘

Lemma 2 (Shelah) $\text{card } \mathfrak{D}(\omega_\lambda) = 2^{\aleph_\lambda}$; es gilt sogar für jedes $e \in \mathfrak{D}(\omega_\lambda) \setminus \{0\}$: $\text{card } \{f \in \mathfrak{D}(\omega_\lambda) \mid f \leq e\} = 2^{\aleph_\lambda}$.

„Schreiben wir $e = E^\sim$ für ein $E \subseteq \omega_\lambda$, so ist nach Lemma 1 $E = \bigcup_{\alpha \in \omega_\lambda} E(\alpha)$ für stationäre $E(\alpha)$. Für jedes $I \subseteq \omega_\lambda$ definieren wir $E_I := \bigcup_{\alpha \in I} E(\alpha)$. Wir sind fertig, nachdem wir gezeigt haben, dass für $I, J \subseteq \omega_\lambda$ mit $I \neq J$ gilt : $E_I \not\sim E_J$. Wir beweisen die Kontraposition :

Ist $E_I \sim E_J$, so gibt es ein cub C mit $E_I \cap C = E_J \cap C$, d.h. $\bigcup_{\alpha \in I} (E(\alpha) \cap C) = \bigcup_{\alpha \in J} (E(\alpha) \cap C)$; da alle $E(\alpha) \cap C$ stationär und damit nichtleer sind, folgt daraus $I = J$. „

Ist $\kappa \leq \omega_\lambda$, und sind zu jedem $\tau < \kappa$ Teilmengen $C(\tau)$, $E(\tau)$ von ω_λ gegeben, so sind der Diagonale Durchschnitt der $C(\tau)$ und die Diagonale Vereinigung der $E(\tau)$ so definiert :
 $\Delta_{\tau < \kappa} C(\tau) := \bigcap_{\tau < \kappa} (C(\tau) \cup \{\nu < \omega_\lambda \mid \nu \leq \tau\})$; $\nabla_{\tau < \kappa} E(\tau) := \bigcup_{\tau < \kappa} (E(\tau) \cap \{\nu < \omega_\lambda \mid \nu > \tau\}) = \{\nu < \omega_\lambda \mid \exists \tau < \kappa (\tau < \nu \wedge \nu \in E(\tau))\}$. Dafür gilt :

Lemma 3 Ist $\kappa \leq \omega_\lambda$, und ist zu jedem $\tau < \kappa$ ein $E(\tau) \subseteq \omega_\lambda$ gegeben, so ist $(\nabla_{\tau < \kappa} E(\tau))^\sim = \sup \{E(\tau)^\sim \mid \tau < \kappa\}$.

„Das Resultat folgt aus zwei Überlegungen :

Für $\tau < \kappa$ ist $\nabla_{\tau < \kappa} E(\tau) \supseteq E(\tau) \cap \{\nu < \omega_\lambda \mid \nu > \tau\} \sim E(\tau)$.

Ist für ein $E \subseteq \omega_\lambda$ und alle $\tau < \kappa$: $E^\sim \supseteq E(\tau)^\sim$,

d.h. für gewisse cubs $C(\tau)$: $E \supseteq E(\tau) \cap C(\tau)$, so erhalten wir $E \supseteq \nabla_{\tau < \kappa} E(\tau) \cap \Delta_{\tau < \kappa} C(\tau) \sim \nabla_{\tau < \kappa} E(\tau)$;

letzteres, da nach [Kun] p. 80, Lemma 6.14 der Diagonale Durchschnitt von $\leq \aleph_\lambda$ cubs wieder ein cub ist. „

Anhang B

MA_{K₁}

Dem Satz 3 des Kapitels III liegt ein Prinzip MA_{K₁}¹ zu Grunde, mit dem man die Elemente einer Partialordnung (die üblicherweise aus partiellen Abbildungen besteht) kombinatorisch einfangen kann. Obwohl unmittelbare Verallgemeinerung eines beweisbaren Satzes MA_{K₀}, ist MA_{K₁} aus den Axiomen $\exists FC$ der üblichen Mengenlehre nach ZERMELO-FRAENKEL unentscheidbar. Es steht im Widerspruch zur Kontinuumshypothese; man hat keine Intuition darüber, ob MA_{K₁} oder seine Negation als gültiges neues Axiom anerkannt werden soll.

Weitergehendes zu den folgenden Definitionen, über Kombinatorik mit MA_{K₁} und über den Unentscheidbarkeitsbeweis von MA_{K₁} findet man in [Kun].

Definitionen $\mathcal{P}$ sei eine feste durch $\leq$ partiell geordnete Klasse, $p, q \in \mathcal{P}$, $A \subseteq \mathcal{P}$.

p und q heissen kompatibel, in Zeichen $p \times q$, falls $\exists r \in \mathcal{P} (r \geq p \wedge r \geq q)$,

ansonsten heissen sie inkompatibel, in Zeichen $p \perp q$.

A heisst dicht, falls $\forall p \in \mathcal{P} \exists q \in A (p \leq q)$.

A heisst $\perp$ -dicht (in SHELAHs Terminologie prä dicht), falls $\forall p \in \mathcal{P} \exists q \in A (p \perp q)$.

A heisst Antikette, falls $\forall p, q \in A (p \perp q)$.

¹ MA steht für Martin's Axiom.

A heisst gerichtet, falls $\forall p, q \in A \exists r \in A (r \leq p \wedge r \leq q)$.

Man sagt, $\mathcal{Q}$ erfülle die abzählbare Antikettenbedingung c.a.c., falls $\mathcal{Q}$ höchstens abzählbare Antiketten zulässt.

$\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ schliesslich ist folgende Aussage :

Ist $(\mathcal{Q}, \leq)$ eine nichtleere Partialordnung, die c.a.c. erfüllt, und ist $\mathcal{D}$ eine Familie von $\leq_{\mathcal{Q}}$ dichten Teilmengen von $\mathcal{Q}$, so gibt es eine gerichtetes $G \in \mathcal{Q}$ mit $\forall D \in \mathcal{D} (G \cap D \neq \emptyset)$.

In Anwendungen von $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ ist der Nachweis, dass eine gegebene Partialordnung c.a.c. erfüllt, technisch meist aufwendig. Aus S. SHELAHs proper forcing (siehe [She]) hat A. MEKLER (siehe [Mek]) jedoch eine Methode gezogen, mit der ein Grossteil der Kombinatorik modelltheoretisch gefasst und damit übersichtlicher wird. Diese Methode werden wir im Folgenden vorstellen. Die zu untersuchende Partialordnung $(\mathcal{Q}, \leq)$ sei dazu fest vorgegeben.

Formeln sollen sich hier stets als solche in der Sprache der Mengenlehre verstehen, d.h. der Sprache 1. Stufe mit einem einzigen binären Relationssymbol $\in$. In einer erweiterten Sprache geschriebene Formeln soll man sich immer durch äquivalente der ursprünglichen Sprache ersetzt denken. Für den Begriff der Relativierung $\mathcal{Q}^N$ einer Formel ϕ auf eine Menge $^1) N$ und der Absolutheit von ϕ für $N, \mathcal{V}$ ($\mathcal{V} = \{x \mid x = x\}$ = Allklasse der Mengenlehre) verweise ich wieder auf [Kun].

¹ Im Gegensatz zur Mengenlehre benötigen wir hier auch nichttransitive.

Ist Σ eine Liste von Formeln $\phi_1, \dots, \phi_n$, so sagen wir noch, N sei eine Σ -Substruktur von V , falls $\phi_1, \dots, \phi_n$ absolut sind für N, V .

Ist solch eine Liste Σ vorgegeben, so folgt aus [Kun] p. 139, Theorem 7.8. (einer Art absteigenden Löwenheim-Skolems) :

Lemma 1 $\forall S$ mit $\text{card } S \leq \aleph_0 \exists N$ mit $\text{card } N = \aleph_0 (S \subseteq N \wedge N \text{ ist } \Sigma\text{-Substruktur von } V)$.

Aus welchen Formeln Σ bestehen soll, wird sich aus den folgenden Zeilen ergeben (Nach Resultaten im Zusammenhang mit GÖDELS Unvollständigkeitssatz muss man sich i. Allg. auf eine endliche Liste beschränken.) : Wir werden das Kürzel $\oplus(x_1, \dots, x_e)$ an den Stellen einfügen, wo von einer (leicht ersichtlichen) Formel mit freien Variabeln $\{x_1, \dots, x_e\} \subseteq N$ ihre Absolutheit für N, V gebraucht wird.

Die Nützlichkeit der Σ -Substrukturen von V beruht in unserem Zusammenhang auf den nächsten drei Lemmata :

Lemma 2 Sei N eine Σ -Substruktur von V .

(1) N ist unter folgenden Operationen abgeschlossen : Bildung von ungeordneten und geordneten Paaren, Bestimmung des linken Elements eines geordneten Paares, $\cup, \cap$, Bestimmung des Nachfolgers $\text{succ}(x)$ einer Ordinalzahl x , $\mathcal{P}$, dom , Einschränkung $r|_X$ des Definitionsbereichs einer Relation r auf eine Menge X , Auswertung einer Funktion an einem Argument, Bestimmung der rechten Elemente $r[x]$, die unter einer Relation r den linken Elementen aus X entsprechen, etc.

- (2) $0 \in N, \omega_0 \subseteq N, \omega_0 \in N, \omega_1 \in N, \text{ etc.}$
 (3) $\forall x \text{ mit } \text{card } x \leq \kappa_0 \ (x \in N \Rightarrow x \subseteq N).$
 (4) $\forall x \text{ mit } \text{card } x < \kappa_0 \ (x \in N \Leftrightarrow x \subseteq N).$
 (5) Für jede Limeszahl $\lambda \leq \omega_1$ ist $\lambda \cap N$ Limeszahl.

Alle Beweise für (1) gehen nach demselben Schema;

wir nehmen als Beispiel die Paarbildung: Seien $x, y \in N$.

$$\exists z (z = \{x, y\}) \stackrel{\circ(x,y)}{\Leftrightarrow} (\exists z (z = \{x, y\})^N \Leftrightarrow \exists z \in N (z = \{x, y\})^N \stackrel{\circ(x,y)}{\Leftrightarrow} \exists z \in N (z = \{x, y\})).$$

In (2) folgt $\omega_0 \subseteq N$ aus $0 \in N$ und der Abgeschlossenheit von N unter succ ; die anderen Beweise gehen nach dem Schema von $\omega_1 \in N$: $\exists y (y = \omega_1) \stackrel{\circ}{\Leftrightarrow} (\exists y (y = \omega_1))^N \Leftrightarrow \exists y \in N (y = \omega_1)^N \stackrel{\circ}{\Leftrightarrow} \exists y \in N (y = \omega_1).$

$$(3): \text{ Sei } x \in N. \text{ card } x \leq \kappa_0 \Leftrightarrow \exists f (f: \omega_0 \rightarrow x) \stackrel{\circ(x)}{\Leftrightarrow} (\exists f (f: \omega_0 \rightarrow x))^N \Leftrightarrow \exists f \in N (f: \omega_0 \rightarrow x)^N \stackrel{\circ(x)}{\Leftrightarrow} \exists f \in N (f: \omega_0 \rightarrow x).$$

Für ein solches f ist nach (1) und (2): $\forall u \in \omega_0 (f(u) \in N)$, also $f[\omega_0] \subseteq N$, d.h. $x \subseteq N$.

" $\Rightarrow$ " von (4) ist Spezialfall von (3); " $\Leftarrow$ " erhält man mittels (1) durch Induktion nach $\text{card } x$.

Bei (5) ist $\lambda \cap N$ Ordinalzahl, da es transitiv ist, denn ist $\alpha \in \lambda \cap N$, so $\text{card } \alpha \leq \kappa_0$, nach (3) also $\alpha \subseteq \lambda \cap N$. Da N und damit $\lambda \cap N$ unter succ abgeschlossen ist, ist diese sogar Limeszahl. $\perp$

Lemma 3 Es seien ein Modul X über einem Ring R mit $\text{card } R \leq \kappa_0$ sowie eine glatte Ausschöpfung $X = \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$ gegeben, bei der jedes X_ν von $\leq \kappa_0$ vielen Elementen erzeugt ist, und $\mathcal{O}$ bestehe aus Untermoduln von X , die je von $< \kappa_0$ vielen Elementen erzeugt sind. Ist N eine Σ -Substruktur von $\mathcal{W}$ mit $\{R, X, +, \cdot, (X_\nu)_{\nu < \omega_1}, \mathcal{O}, \leq\} \subseteq N$, so gelten:

$$(6) \quad \forall E \in N \text{ mit } E \in X (\langle E \rangle^1) \in N).$$

$$(7) \quad X \cap N = X_{\omega_1 \cap N}.$$

$$(8) \quad \mathcal{O} \cap N = \{ \gamma \in \mathcal{O} \mid \gamma \subseteq X_{\omega_1 \cap N} \}.$$

$$\Gamma(6) : \exists \gamma (\gamma = \langle E \rangle) \xrightarrow{\textcircled{*}(E, R, X, +, \cdot)} \dots \xrightarrow{\textcircled{*}(\gamma, E, R, X, +, \cdot)} \exists \gamma \in N (\gamma = \langle E \rangle).$$

Dabei folgt das mit "... " Übersprungene dem Schema der Beweise von Lemma 2. Zu überlegen hat man sich lediglich, dass man $\gamma = \langle E \rangle$ formelmässig ausdrücken kann. $\perp$

$$(7) : \text{Zunächst gilt } \forall v \in \omega_1 \cap N \xrightarrow{(1)} X_v \in N \xrightarrow{(3)}$$

$X_v \subseteq N$, also $N \supseteq \bigcup_{v \in \omega_1 \cap N} X_v \stackrel{(2)}{=} X_{\omega_1 \cap N}$, weshalb es genügt, zu

zeigen, dass $X \cap N = X_{\omega_1 \cap N} \cap N$. Sei dazu $x \in N$. $x \in X$
 $\iff \exists v (x \in X_v) \xrightarrow{\textcircled{*}(x, (X_v)_{v \in \omega_1})} \dots \xrightarrow{\textcircled{*}(x, (X_v)_{v \in \omega_1}, v)} \exists v \in N (x \in X_v) \iff x \in X_{\omega_1 \cap N}.$

$$(8) : \mathcal{O} \cap N = \{ \gamma \in \mathcal{O} \mid \gamma \in N \} \stackrel{(4), (6)}{=} \{ \gamma \in \mathcal{O} \mid \gamma \subseteq N \} \\ = \{ \gamma \in \mathcal{O} \mid \gamma \subseteq X \cap N \} \stackrel{(7)}{=} \{ \gamma \in \mathcal{O} \mid \gamma \subseteq X_{\omega_1 \cap N} \}. \perp$$

Lemma 4 Ist N eine Σ -Substruktur von $\mathcal{V}$ mit $\{\mathcal{O}, \leq\} \subseteq N$, so gelten :

$$(9) \quad \forall A \in N (A \uparrow^2) \in N).$$

$$(10) \quad \forall D \in N (\exists A \subseteq D (A \text{ ist maximale Antikette}^3)) \\ \Rightarrow \exists A \subseteq D \text{ mit } A \in N (A \text{ ist maximale Antikette}).$$

$$(11) \quad \forall A \in N (A \uparrow \cap N \perp\text{-dicht} \Rightarrow A \cap N \perp\text{-dicht}).$$

$$(12) \quad \forall D \in N (D \text{ dicht} \iff D \cap N \text{ dicht in } \mathcal{O} \cap N^4).$$

$\Gamma(9)$ und (10) beweisen sich nach dem gewohnten

Schema im Beweis von Lemma 2, unter wiederholter Berufung auf $\textcircled{*}$.

¹ die R -lineare Hülle von E in X

² $:= \{ q \in \mathcal{O} \mid \exists p \in A (p \leq q) \}$

³ d.h. A ist Antikette, jedoch ist dies keine echte Obermenge von A

⁴ d.h. dicht im durch die Restriktion von $\leq$ partiell geordneten $\mathcal{O} \cap N$

Für (11) sei $A \in N$ mit $A \uparrow n N \perp$ -dicht vorgegeben, und zum Beweis, dass $A \cap N \perp$ -dicht ist, betrachten wir ein beliebiges $p \in \mathcal{P}$. Nach Voraussetzung existiert ein $q \in A \uparrow n N$ mit $p \not\leq q$. $q \in A \uparrow \Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{P} (r \in A \wedge r \leq q) \xrightarrow{(\mathcal{P}, \leq, A, q)} \dots$
 $\xrightarrow{(\mathcal{Q}, \leq, A, q)} \exists r \in N (r \in A \wedge r \leq q)$. Für solch ein $r \in A \cap N$ gilt $p \not\leq r$.

(12) : Sei $D \in N$ vorgegeben. D dicht $\Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P} \exists q \in D (p \leq q) \xrightarrow{(\mathcal{P}, \leq, D)} (\forall p \in \mathcal{P} \exists q \in D (p \leq q))^N \Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P} \cap N \exists q \in D \cap N (p \leq q)^N \xrightarrow{(\mathcal{P}, \leq, q)} \forall p \in \mathcal{P} \cap N \exists q \in D \cap N (p \leq q) \Leftrightarrow D \cap N$ ist dicht in $\mathcal{P} \cap N$. $\perp$

$\mathcal{N}_0 := \{ N \mid \text{card } N = \kappa_0 \wedge \{ \mathcal{P}, \leq \} \subseteq N \wedge N \text{ ist } \Sigma\text{-Substruktur von } \mathcal{V} \}$ ist nach Lemma 1 dicht in der durch $\leq$ partiell geordneten Klasse $[\mathcal{V}]^{\mathcal{B}} := \{ N \mid \text{card } N < \kappa_1 \}$, sodass die Bedingung des folgenden Hauptlemmas für $\mathcal{N} := \mathcal{N}_0$ erfüllt ist :

Hauptlemma $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_0$ sei dicht in der durch $\leq$ partiell geordneten Klasse $[\mathcal{V}]^{\mathcal{B}}$. Dann erfüllt $\mathcal{P}$ genau dann die c.a.c., wenn :

$\forall N \in \mathcal{V} \forall D \subseteq \mathcal{P}$ mit $D \in N (D \cap N \text{ dicht in } \mathcal{P} \cap N \Rightarrow D \cap N \perp\text{-dicht})$.

Wir geben zunächst das Gerüst des Beweises :

$\mathcal{P}$ erfüllt c.a.c.

$\Leftrightarrow \forall A \subseteq \mathcal{P} (A \text{ maximale Antikette} \Rightarrow \text{card } A < \kappa_1)$

$\Leftrightarrow \forall A \subseteq \mathcal{P} \forall N \in \mathcal{N}$ mit $A \in N (A \text{ maximale Antikette} \Rightarrow A \subseteq N)$

$\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N} \forall A \subseteq \mathcal{P}$ mit $A \in N (A \text{ maximale Antikette} \Rightarrow A \subseteq N)$

$\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N} \forall A \subseteq \mathcal{P}$ mit $A \in N (A \text{ max. A.k.} \Rightarrow A \cap N \text{ max. A.k.})$

$\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N} \forall D \subseteq \mathcal{P}$ mit $D \in N (D \text{ dicht} \Rightarrow D \cap N \perp\text{-dicht})$

$\Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N} \forall D \subseteq \mathcal{P}$ mit $D \in N (D \cap N \text{ dicht in } \mathcal{P} \cap N \Rightarrow D \cap N \perp\text{-dicht})$.

Nun werden wir die markierten Beweisschritte näher begründen; dabei wird stets verwendet, dass die $N \in \mathcal{N}$ wegen $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}_0$ den Voraussetzungen der Lemmata 2 und 4 genügen.

② : " $\rightarrow$ " folgt aus (3); für " $\leftarrow$ " sei ein $A \subseteq \mathcal{P}$ vorgegeben, das maximale Antikette ist. Da $\mathcal{N}$ dicht in $[V]^{\mathfrak{M}}$ ist, gibt es ein $N \in \mathcal{N}$ mit $\{A\} \subseteq N$. Wegen (3) ist $A \subseteq N$, also $\text{card } A < \aleph_1$.

Für ④ werden folgende einfachen Tatsachen verwendet : Eine Antikette ist genau dann maximale Antikette, wenn sie $\perp$ -dicht ist, und ist A $\perp$ -dicht, so ist $A^\uparrow$ dicht. Zu " $\rightarrow$ " seien $N \in \mathcal{N}$ und $D \subseteq \mathcal{P}$ mit $D \in \mathcal{N}$, D dicht vorgegeben. Da D $\perp$ -dicht ist, gibt es eine maximale Antikette $A \subseteq D$, von der man nach (10) noch $A \in \mathcal{N}$ annehmen kann. Nach Voraussetzung ist $A \cap N$ maximale Antikette, also $\perp$ -dicht; also ist auch $D \cap N \supseteq A \cap N$ $\perp$ -dicht. Zu " $\leftarrow$ " seien $N \in \mathcal{N}$ und $A \subseteq \mathcal{P}$ mit $A \in \mathcal{N}$, A maximale Antikette gegeben. $A^\uparrow$ ist dann dicht, und nach (9) gilt $A^\uparrow \in \mathcal{N}$. Nach Voraussetzung ist $A^\uparrow \cap N$ $\perp$ -dicht, was wegen (11) auch für $A \cap N$ gilt; also ist $A \cap N$ maximale Antikette.

Für ⑤ wird (12) verwendet.]

Um in den Anwendungen eine günstige Wahl von $\mathcal{N}$ treffen zu können, stellen wir die folgenden Lemmata 5 bis 7 bereit, die statt mit dichten Teilklassen von $[V]^{\mathfrak{M}}$ mit dem etwas engeren und technisch handlicheren Begriff eines cubs in $[V]^{\mathfrak{M}}$ arbeiten; es handelt sich dabei um eine direkte Übertragung des im Anhang A definierten Begriff eines cubs

von ω_1 auf $[V]^{\aleph_1}$.

Definition Eine Klasse $\mathcal{N} \subseteq [V]^{\aleph_1}$ heisst cub in $[V]^{\aleph_1}$, falls $\forall (N(\alpha))_{\alpha < \omega_0}$ aufsteigend in $\mathcal{N}$ ($\bigcup_{\alpha < \omega_0} N(\alpha) \in \mathcal{N}$) und falls $\mathcal{N}$ in $[V]^{\aleph_1}$ dicht ist.

Lemma 5 $\mathcal{N}_0$ ist ein cub in $[V]^{\aleph_1}$.

⌈Dass $\mathcal{N}_0$ dicht in $[V]^{\aleph_1}$ ist, wurde schon vor dem Hauptlemma erwähnt. Die andere Eigenschaft ist für Σ -Substrukturen von V sofort einzusehen.⌋

Lemma 6 Ist $C \subseteq \omega_1$ ein cub und $\mathcal{N}$ ein cub in $[V]^{\aleph_1}$, so ist $\{N \in \mathcal{N} \mid \omega_1 \cap N^1 \in C\}$ ein cub in $[V]^{\aleph_1}$.

⌈Es ist nur die Dichtheit zu zeigen: Zu gegebenem $\tilde{N} \in [V]^{\aleph_1}$ bilden wir in $\mathcal{N}$: $\tilde{N} \subseteq N(0) \subseteq N(1) \subseteq \dots$ mit: $\omega_1 \cap N(u) \subseteq v(u) \subseteq N(u+1)$, wo $v(u) \in C$. Dann erfüllt $N := \bigcup_{u < \omega_0} N(u)$: $\omega_1 \cap N = \bigcup_{u < \omega_0} (\omega_1 \cap N(u)) = \sup \{v(u) \mid u < \omega_0\} \in C$.⌋

Lemma 7 Ist $\mathcal{N}$ ein cub in $[V]^{\aleph_1}$, so ist auch $\{N \in \mathcal{N} \mid \exists (N(\alpha))_{\alpha < \omega_0} \text{ in } \mathcal{N} (N = \bigcup_{\alpha < \omega_0} N(\alpha) \wedge \forall u < m < \omega_0 (N(u) \subseteq N(u+1) \wedge \omega_1 \cap N(u)^1 < \omega_1 \cap N(u+1)))\}$ ein cub in $[V]^{\aleph_1}$.

⌈Wir zeigen wieder nur die Dichtheit: Sei $\tilde{N} \in [V]^{\aleph_1}$ gegeben. Wir wählen rekursiv eine Folge $(N(\alpha))_{\alpha < \omega_0}$ von Elementen aus $\mathcal{N}$ mit $N(0) \supseteq \tilde{N}$, und $N(u+1)$ sei eine Obermenge von $N(u)$, die $(\omega_1 \cap N(u)) + 1$ enthält. $N := \bigcup_{\alpha < \omega_0} N(\alpha)$ ist dann eine Obermenge von $\tilde{N}$, die in der gewünschten Klasse liegt.⌋

¹ ist nach (5) eine (Limes-)Ordinalzahl.

Anhang C

 $\Diamond(E)$ und $\Phi(E)$

Für den Satz 4 des Kapitels III benötigen wir eine Aussage $\Phi(E)$, die wie $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ aus ZFC unentscheidbar ist, jedoch zu $\mathbf{MA}_{\aleph_1}$ im Widerspruch steht. Um sie formulieren zu können, führen wir einen Begriff von Ausschöpfung ein, der sich vom gleichnamigen des Kapitels I (siehe dort vor Lemma 2) etwas unterscheidet; die Ausschöpfungen beim Satz 4 des Kapitels III fallen aber unter beide Begriffe.

Definition Eine (glatte) Ausschöpfung einer Menge (!) X mit $\text{card} (!)X \leq (!)\aleph_1$ ist eine Familie $(X_\nu)_{\nu < \omega_1}$ so, dass $\forall \nu < \omega_1 (\text{card } X_\nu < \aleph_1)$, $\forall \tau \leq \nu < \omega_1 (X_\tau \subseteq X_\nu)$, $\forall \nu < \omega_1$ mit ν ist Limeszahl $(X_\nu = \bigcup_{\tau < \nu} X_\tau)$, und $X = \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$. In solcher Situation schreiben wir in diesem Anhang: $X \overset{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$.

Lemma 1 Sei $X \overset{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$, $\tilde{X} \overset{\text{gl}}{=} \bigcup_{\nu < \omega_1} \tilde{X}_\nu$, f eine Abbildung: $X \rightarrow \tilde{X}$.

- (1) $\{\nu < \omega_1 \mid f(X_\nu) \subseteq \tilde{X}_\nu\}$ ist ein cub.
- (2) Ist f surjektiv, so ist $\{\nu < \omega_1 \mid f(X_\nu) = \tilde{X}_\nu\}$ ein cub.

Γ In (1) ist nur zu zeigen, dass $C := \{\nu < \omega_1 \mid f(X_\nu) \subseteq \tilde{X}_\nu\}$ in ω_1 unbeschränkt ist: Zu gegebenem $\tau < \omega_1$ bilden wir in ω_1 : $\tau \leq \nu(0) \leq \nu(1) \leq \dots$ mit $f(X_{\nu(n)}) \subseteq \tilde{X}_{\nu(n+1)}$. $\nu := \sup \{\nu(n) \mid n < \omega_0\}$ erfüllt dann $\nu \geq \tau$,

und $f(X_\nu) = \bigcup_{n < \omega_1} f(X_{\nu(n)}) \subseteq \bigcup_{n < \omega_1} \tilde{X}_{\nu(n)} = \tilde{X}_\nu$.

(2) geht wie im Lemma 2 des Kapitels I, denn für eine Surjektion f ist $\tilde{X} \models^{\text{st}} \bigcup_{\nu < \omega_1} f(X_\nu)$. $\perp$

Definitionen Für ein (notwendigerweise stationäres)

$E \subseteq \omega_1$ sei $\Diamond(E)$ 1. Version ("Karo-Prinzip") die Aussage :

Es gibt eine Familie $(T_\nu)_{\nu \in E}$ mit $\forall \nu \in E (T_\nu \subseteq \nu)$ so, dass für jedes $A \subseteq \omega_1$ die Menge $\{\nu \in E \mid A \cap \nu = T_\nu\}$ stationär ist.

Die 2. Version von $\Diamond(E)$ lautet :

Ist $X \models^{\text{st}} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$ mit $\text{card } X = \aleph_1$, so gibt es eine Familie $(S_\nu)_{\nu \in E}$ mit $\forall \nu \in E (S_\nu \subseteq X_\nu)$ so, dass für jedes $A \subseteq X$ die Menge $\{\nu \in E \mid A \cap X_\nu = S_\nu\}$ stationär ist.

Die 1. Version von $\clubsuit(E)$ ("schwaches Karo-Prinzip")

ist :

Ist $X \models^{\text{st}} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$ mit $\text{card } X = \aleph_1$, und ist zu jedem $\nu \in E$ eine Partitionsfunktion $P_\nu : \mathcal{P}(X_\nu) \rightarrow \{0,1\}$ vorgegeben, so gibt es eine Funktion $\phi : E \rightarrow \{0,1\}$ so, dass für alle $A \subseteq X$ die Menge $\{\nu \in E \mid P_\nu(A \cap X_\nu) = \phi(\nu)\}$ stationär ist.

Die 2. Version von $\clubsuit(E)$ lautet :

Ist $X \models^{\text{st}} \bigcup_{\nu < \omega_1} X_\nu$ mit $\text{card } X = \aleph_1$, ist $\text{card } \tilde{X} \leq \aleph_1$, und ist zu jedem $\nu \in E$ eine Partitionsfunktion $\gamma_\nu : \{g \mid g : X_\nu \rightarrow \tilde{X}\} \rightarrow \{0,1\}$ vorgegeben, so gibt es eine Funktion $\phi : E \rightarrow \{0,1\}$ so, dass für alle $f : X \rightarrow \tilde{X}$ die Menge $\{\nu \in E \mid \gamma_\nu(f|_{X_\nu}) = \phi(\nu)\}$ stationär ist.

Lemma 2 Für $E, F \subseteq \omega_1$ mit $E \sim F$ gelten :

$\Diamond(E) \iff \Diamond(F)$ und $\clubsuit(E) \iff \clubsuit(F)$, je für beide Versionen.

Wir zeigen als Beispiel die 2. Version von $\Diamond(E)$. Da für $E, F \subseteq \omega_1$ mit $E \sim F$ gilt: $E \sim E \cap F \sim F$, können wir o.B.d.A. $E \subseteq F$ annehmen. Bei " $\Rightarrow$ " ergänzen wir $(S_\gamma)_{\gamma \in E}$ durch $\forall \gamma \in F \setminus E (S_\gamma := \emptyset)$ zu $(S_\gamma)_{\gamma \in F}$, und für " $\Leftarrow$ " ist $(S_\gamma)_{\gamma \in F}$ auf E zu restringieren.]

$V = \mathbb{L}$ ist die Aussage, dass das Universum V der Mengenlehre in einem gewissen Sinn minimal ist; für eine präzise Definition von $\mathbb{L}$ verweisen wir auf [Kun] p. 167. Auch sie ist aus $\mathcal{ZFC}$ unentscheidbar. Der hier wichtige Teil davon, dass sie mit $\mathcal{ZFC}$ widerspruchsfrei ist, steht in [Kun] auf p. 170. Nach den folgenden Lemmata 3 und 4 ist die in Satz 4 von Kapitel III angewendete 2. Version von $\clubsuit(E)$ ebenfalls mit $\mathcal{ZFC}$ widerspruchsfrei, und da die Aussage des Satzes 4 des Kapitels III aus $\clubsuit(E)$ folgt, jedoch der mit $\mathcal{ZFC}$ widerspruchsfreien Aussage des Satzes 3 des Kapitels III widerspricht, ist $\clubsuit(E)$ schliesslich aus $\mathcal{ZFC}$ unentscheidbar.

Lemma 3 $V = \mathbb{L} \Rightarrow \forall E \subseteq \omega_1$ mit E stationär $(\Diamond(E) \text{ 1. Version})$.

Der Beweis ist in [Kun] p. 181 als Übung 14 gegeben, und er steht für den Spezialfall $E = \omega_1$ auf pp. 178 f.]

Lemma 4 $\forall E \subseteq \omega_1 (\Diamond(E) \text{ 1. Version} \iff \Diamond(E) \text{ 2. Version} \Rightarrow \clubsuit(E) \text{ 1. Version} \iff \clubsuit(E) \text{ 2. Version})$.

(Das $\Rightarrow$ in der Mitte kann übrigens nicht durch $\Leftrightarrow$ ersetzt werden.)

Da die 1. Version von $\Diamond(E)$ ein Spezialfall der 2. ist, ist an dieser Stelle nur " $\Rightarrow$ " zu zeigen: Sei $(T_v)_{v \in E}$ durch die 1. Version gegeben; also $T_v \subseteq v$. Weiter sei $A \subseteq X \not\equiv^{\#} \bigcup_{v \in \omega_1} X_v$, $\text{card } X = \kappa_1$. Wir nehmen eine Bijektion $f: \omega_1 \rightarrow X$. Nach Lemma 1 (2) ist $\{v \in E \mid \{f(\tau) \mid \tau < v\} = X_v\}$ ein cub, und da $\Diamond(E)$ nach Lemma 2 nur von $E^\sim$ abhängt, können wir o.B.d.A. annehmen: $\forall v \in E (\{f(\tau) \mid \tau < v\} = X_v)$. Für $S_v := f(T_v)$ gilt dann $S_v \subseteq X_v$. Nach der 1. Version ist $\{v \in E \mid \underbrace{f^{-1}(A) \cap v}_{\Leftrightarrow A \cap X_v} = T_v\}$ stationär. $\perp$

Bei " $\Rightarrow$ " in der Mitte genügt es, $\forall v \in E (\phi(v) := P_v(S_v))$ zu setzen.

Bei $\phi(E)$ erhalten wir " $\Rightarrow$ " dadurch, dass wir $\tilde{X} \not\equiv^{\text{flat}}$ $\bigcup_{v \in \omega_1} \tilde{X}_v$ nehmen und setzen: $Y_v := X_v \times \tilde{X}_v$ und $Y := X \times \tilde{X}$; dann ist $Y \not\equiv^{\#} \bigcup_{v \in \omega_1} Y_v$. $P_Y: \mathcal{P}(Y_v) \rightarrow \{0, 1\}$ sei so gewählt, dass für Abbildungen $g: X_v \rightarrow \tilde{X}$ gilt:

$g^{-1} \subseteq Y_v \Rightarrow \gamma_v(g) = P_Y(g)$. Die 1. Version liefert nun ein ϕ so, dass für jedes $f: X \rightarrow \tilde{X}$ die Menge $\{v \in E \mid \underbrace{P_Y(f \cap Y_v)}_{= \gamma_v(f \cap Y_v)} = \phi(v)\}$ stationär ist; nach Lemma 1 (1) ist

dies auch $\{v \in E \mid \gamma_v(f \cap Y_v) = \phi(v) \wedge f(X_v) \subseteq \tilde{X}_v\}$, und somit ist ebenfalls $\{v \in E \mid \gamma_v(f|_{X_v}) = \phi(v)\}$ stationär.

" $\Leftarrow$ " erhalten wir dadurch, dass wir $\tilde{X} := \{0, 1\}$

¹ g wird mit seinem Graphen identifiziert.

setzen und Teilmengen von X durch ihre charakteristische Funktion beschreiben. $\rfloor$

Literatur

- [Ek1] P. C. EKLOF, Set Theoretic Methods in Homological Algebra and Abelian Groups, Les presses de l'université de Montréal, Montréal 1980
- [Ek2] P. C. EKLOF, The structure of ω_λ -separable groups, Trans. AMS 297 (1983), 497 - 523
- [Ek3] P. C. EKLOF, Handschriftliche Notizen, 1981
- [E/H] P. C. EKLOF und M. HUBER, On ω -filtered vector spaces and their application to abelian $\mathfrak{p}$ -groups, Teil I Comment. Math. Helvetici 60 (1985), 145 - 171; Teil II ist noch nicht erschienen.
- [E/M] P. C. EKLOF und A. MEKLER, On endomorphism rings of ω_λ -separable primary groups, erschienen in : Abelian Group Theory (Lecture notes in mathematics, 1006), Springer-Verlag, Berlin 1983; 320 - 339
- [Gro] H. GROSS, Quadratic Forms in Infinite Dimensional Vector Spaces (Progress in mathematics, 1), Birkhäuser, Boston 1979
- [G/K] H. GROSS und H. A. KELLER, On the problem of classifying infinite chains in projective and orthogonal geometry, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.1. 8 (1983), 67 - 86
- [G/O] H. GROSS und E. OGG, Quadratic spaces with few isometries, Comment. Math. Helvetici 48 (1973), 511 - 519

- [Hub] M. HUBER, Methods of set theory and the abundance of separable abelian $\mathfrak{p}$ -groups, erschienen in : Abelian Group Theory (Lecture notes in mathematics, 1006), Springer-Verlag, Berlin 1983; 304 - 319
- [Kun] K. KUNEN, Set Theory. An Introduction to Independence Proofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1980
- [Mek] A. MEKLER, $\mathfrak{c.c.c.}$ forcing without combinatorics, Journal of symbolic logic 49 (1984), 830 - 832
- [She] S. SHELAH, Proper Forcing (Lecture notes in mathematics, 940), Springer-Verlag, Berlin 1982

Lebenslauf

Geboren wurde ich, Fred Urs Appenzeller, Bürger von Zürich ZH und St. Gallen SG, am 16. April 1957 in Zürich.

1970 trat ich ins Literargymnasium Zürichberg ein, wo ich 1976 mit der Matura (Typus B) abschloss.

Im Oktober desselben Jahres immatrikulierte ich mich an der Universität Zürich zum Studium der Mathematik mit Theoretischer und Experimentalphysik als Nebenfächern. Ich besuchte Vorlesungen folgender Dozenten : H. Amann, W. Baur, M. Brodmann, E. Engeler, M. Fürer, P. Gabriel, H. Gross, P. Hess, M. Huber, H. Jarchow, G. Karrer, H.A. Keller, H.H. Keller, G. Mazzola, M. Nagasawa, A. Prestel, V. Strassen, K. Strebel; G. Scharf, N. Straumann, A. Thellung; V. Meyer, P. Truöl, F. Waldner.

1981 erlangte ich das Diplom mit der Arbeit : "Cliffordalgebren als Quadratische Räume. Unendlichdimensionaler Fall", die unter der Leitung von H. Gross entstanden war, ebenso wie die vorliegende Dissertation.

Von 1981 bis 1985 war ich Assistent am Mathematischen Institut der Universität Zürich.

